1905

José Isaac Corral

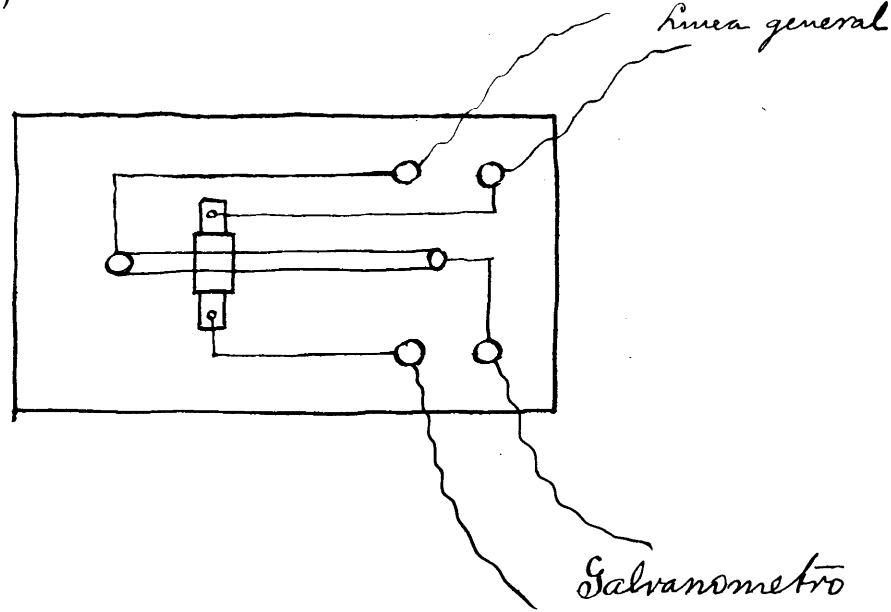
# Practicas de Electrotecnia

Curso de 1904 á 1905

José Isaac Corral

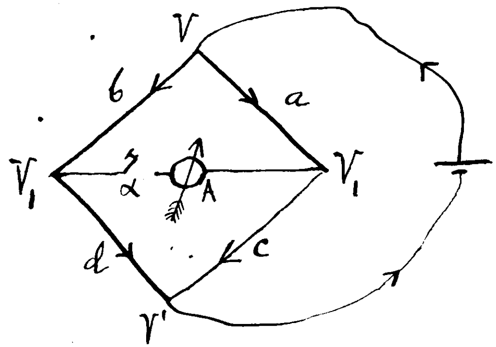
# Llave de corto circuito

Empleada en casi todas las medidas electricas, enlaza el Galvanometro con la linea general donde circula la corriente, y sirve para que en un momento dado, esta pase por aquel.
El siguiente croquis, da de ella idea



# Puente de Wheatstone

El puente de Wheatstone que nos servirá de tipo de comparación en lo sucesivo es el adjunto



Si suponemos que abriendo ó cerrando la llave $\underline{\alpha}$ la desviación en el galvanometro A sea cero, la propiedad característica de este puente es

$$\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

significando estas letras las resistencias de sus brazos correspondientes

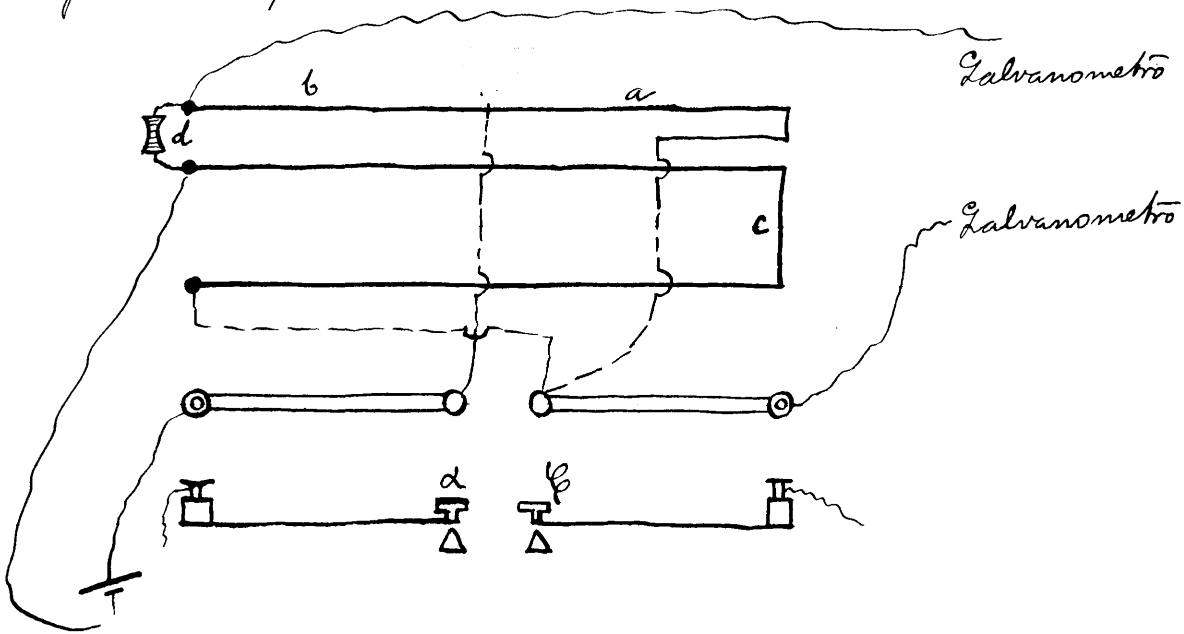
De donde $d = \frac{b}{a} \cdot c$ (resistencia á medir)

Los brazos $\underline{a}$ y $\underline{b}$ se llaman de <u>proporción</u> y el $\underline{c}$ de <u>comparación</u>

# Cajas de resistencia

Para introducir resistencias en un circuito se suele generalmente usar las llamadas <u>cajas de resistencia</u> que consisten en una serie de bobinas sucesivas de diversas resistencias unidas en una de sus extremidades á unos pedazos de latón colocados por encima de una cubierta de ebonita, de modo que se pueden introducir en el circuito quitando de su alveolo un pequeño cilindro de metal.

Estas cajas sirven para medir resistencias, pues están formadas por un puente de Wheatstone, como lo indica la figura siguiente, que es el esqueleto de la caja de Carpentier



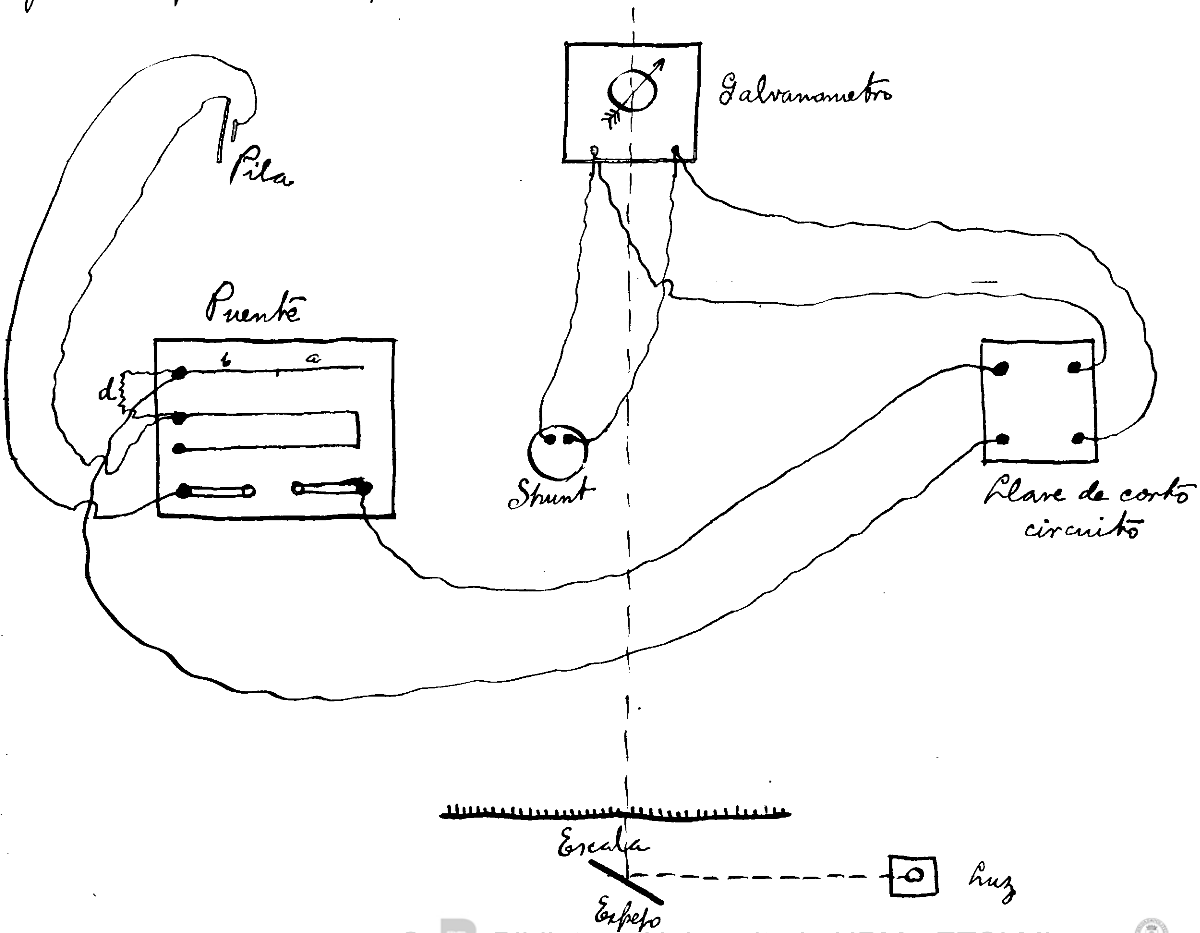
Los brazos $b$ y $a$ tienen cada uno tres bobinas cuyas resistencias son de 10, 100 y 1000 ohms, de modo que la relación $\frac{b}{a}$ puede recibir los valores de 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, 10, 100. El brazo $c$ tiene varias bobinas de modo que se pueden formar todas las resistencias comprendidas entre 1 y 10 000 ohms: así pues, las resistencias extremas que se pueden apreciar en el brazo $d$ son $\frac{1}{100}$ de ohm y 1 megaohm. Con objeto de no calentar los hilos de las bobinas no se deben emplear mas que uno ó dos elementos de pila. Las dos llaves $\alpha$ y $\beta$ se emplean para cerrar los circuitos de la pila y del galvanometro, debiendose siempre bajar primero la $\alpha$ y luego la $\beta$ para evitar los efectos de la extracorriente en el galvanometro, y esto el tiempo estrictamente necesario para efectuar la lectura, pues de otro modo sufririan mucho las bobinas de la caja.

## Medida de resistencias

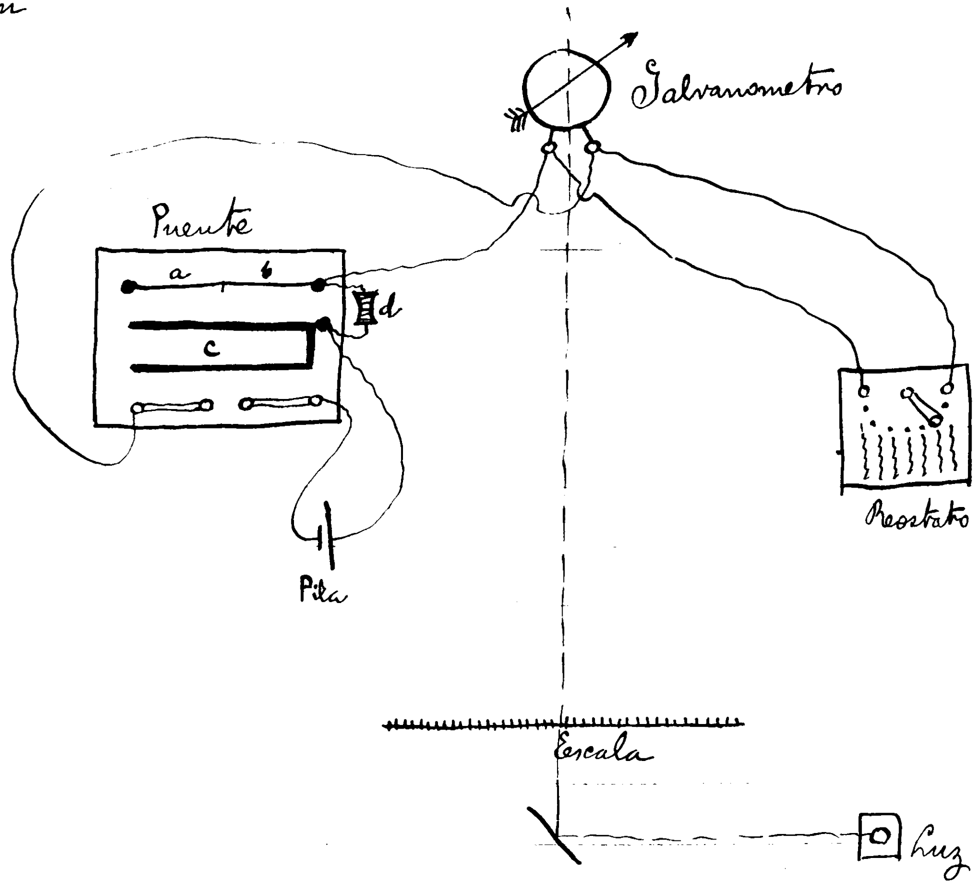
Conociendo la propiedad fundamental del puente

$$d = \frac{b}{a} \cdot c$$

se deduce el valor de $d$ en función de los conocidos $b$, $a$ y $c$, para lo cual será preciso combinar estos de tal modo que la corriente que circula por el galvanometro sea nula es decir que este no se desvie abriendo ó cerrando su llave correspondiente G de la caja ó puente. La disposición general que se adopta es



Con una caja de construcción inglesa los detalles de la disposición general serán



La resistencia á medir se coloca en el brazo <u>d</u> del puente, despues de lo cual, poniendo el shunt ó el reostato en corto circuito y una cierta resistencia en el brazo <u>c</u> se cierran las llaves de la pila y del galvanometro leyendose en la escala el numero de desviaciones á la derecha ó la izquierda por este señaladas: variando convenientemente <u>c</u> se llega á una desviación minima y para cerciorarse si esta es la definitiva se modifica el shunt y el reostato para que pase mas corriente por el galvanometro y asi sucesivamente cambiando <u>c</u> hasta coger la resistencia incognita <u>d</u> entre dos limites superior é inferior. Hemos supuesto que la relación de los brazos <u>b</u> y <u>a</u> era de $\frac{10}{10} = 1$: modificando esta relación se puede apurar mas la medida de <u>d</u> como es facil comprender.

Problema 8.º — <u>Encontrar la longitud de un alambre de Cu que tiene 172 ohmnios de resistencia.</u>

Resistencia especifica ........ $0^{ohms}, 000002$

Diametro ........... $0^{cm}.013$

Area de la sección $= \pi \cdot \frac{d^2}{4} = 0^{cm^2}.000132 72 84$

Formula que resuelve el problema $r = \rho \cdot \frac{l}{s}$

$$172 \times 10^9 = 2 \times 10^3 \times \frac{l}{0.000132 72 84}$$

$$l = 114^m,146424$$

<u>Limite del error relativo.</u>

$\varepsilon_a^r < 1^{ohm}$ $\varepsilon_r^r < \frac{1}{172}$

$\varepsilon_a^d < \frac{1}{1000}$ $\varepsilon_r^d < \frac{1}{13}$

$$\varepsilon_r^{d^2} < \frac{2}{13}$$

$(\pi = 3,1415)$ $\varepsilon_a^{\pi} < \frac{1}{10\,000}$ $\varepsilon_r^{\pi} < \frac{1}{3 \times 10^4}$

$$\varepsilon_r^{\pi} < \frac{1}{31415}$$

luego
$$\varepsilon_r^{l} < \frac{1}{172} + \frac{2}{13} + \frac{1}{31415} = \frac{11217391}{70243940}$$

$$\varepsilon_r^{l} < \frac{1}{6,262056}$$

Problema 2º — Encontrar la resistencia especifica de un alambre que por 2 metros de longitud tiene de resistencia $0^{ohms},58$.

Diametro ............. $0^{cm},0625$

$$\rho(cgs) = \frac{0,58 \times 10^9 \times \pi \times (0,0625)^2}{200 \times 4} (cgs)$$

$$\rho = \frac{0,58 \times \pi \times (625)^2}{80}$$

$$\rho = 8896^{cgs},827421$$

$$\rho = 0^{ohms},0000008896$$

ó sea aproximadamente

$$\rho = 9 \text{ microohms}$$

Limite del error relativo.

$$\varepsilon_a^r < 0^{ohms},01 \qquad \varepsilon_r^r < \frac{1}{58}$$

$$\varepsilon_a^d < \frac{1}{1000} \qquad \varepsilon_r^d < \frac{10}{625}$$

$$\varepsilon_r^{d^2} < \frac{20}{625}$$

luego

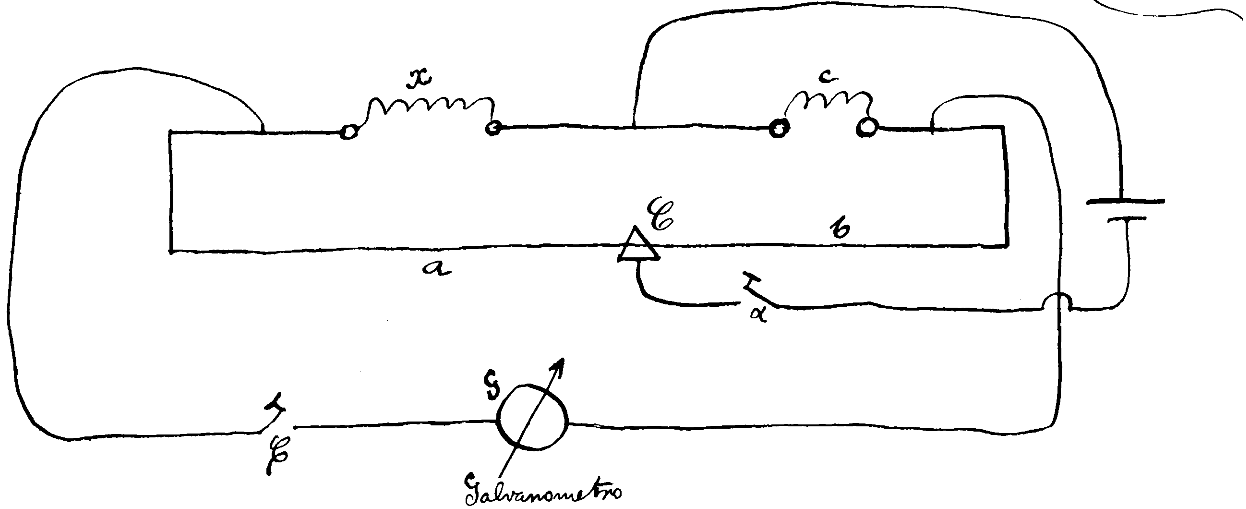
$$\varepsilon_r^\rho < \frac{1}{31415} + \frac{1}{58} + \frac{20}{625}$$

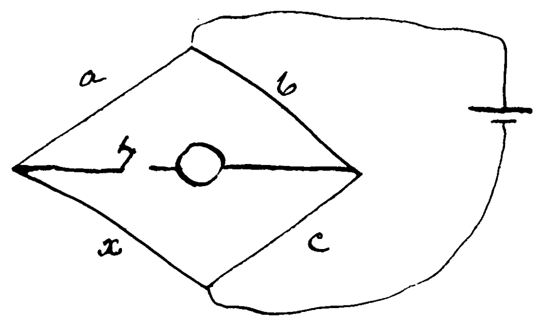
$$\varepsilon_r^\rho < \frac{1}{20,295} < \frac{1}{2.10}$$

Con el puente se hicieron numerosos ejercicios, de resistencia de hilos: así se midió la resistencia de un pequeño alambre destinado á apunt que se vió era de $0^{ohm},10$ á $0^{m}.11$. La resistencia de una lampara de incandescencia, restada á la total la de los hilos, se encontró era de 562 ohmnios

## Puente de hilo con corredor

El esqueleto de este puente es el siguiente: en $x$ se coloca la resistencia á medir, en $c$ una resistencia tipo que sirve de comparación; $ab$ es un hilo de $1^{m}$ proximamente de longitud, con $1^{mm},5$ de diametro uniforme en toda




ella, siendo esta una condición ineludible, pues el método toma de la misma su fundamento. La corredera C se desliza á lo largo del hilo hasta llegar á una posición tal, que cerrando las llaves $\underline{\alpha}$ y $\beta$ no se observe desviación alguna en el galvanometro $G$: el principio del puente de Wheatstone podrá aplicarse y tendremos

$$x = \frac{b}{a} . c$$

de modo que poniendo en $\underline{c}$ 1 ohm internacional

$$x = \frac{b}{a} = \frac{l . \frac{\rho}{s}}{l' . \frac{\rho}{s}} = \frac{l}{l'}$$

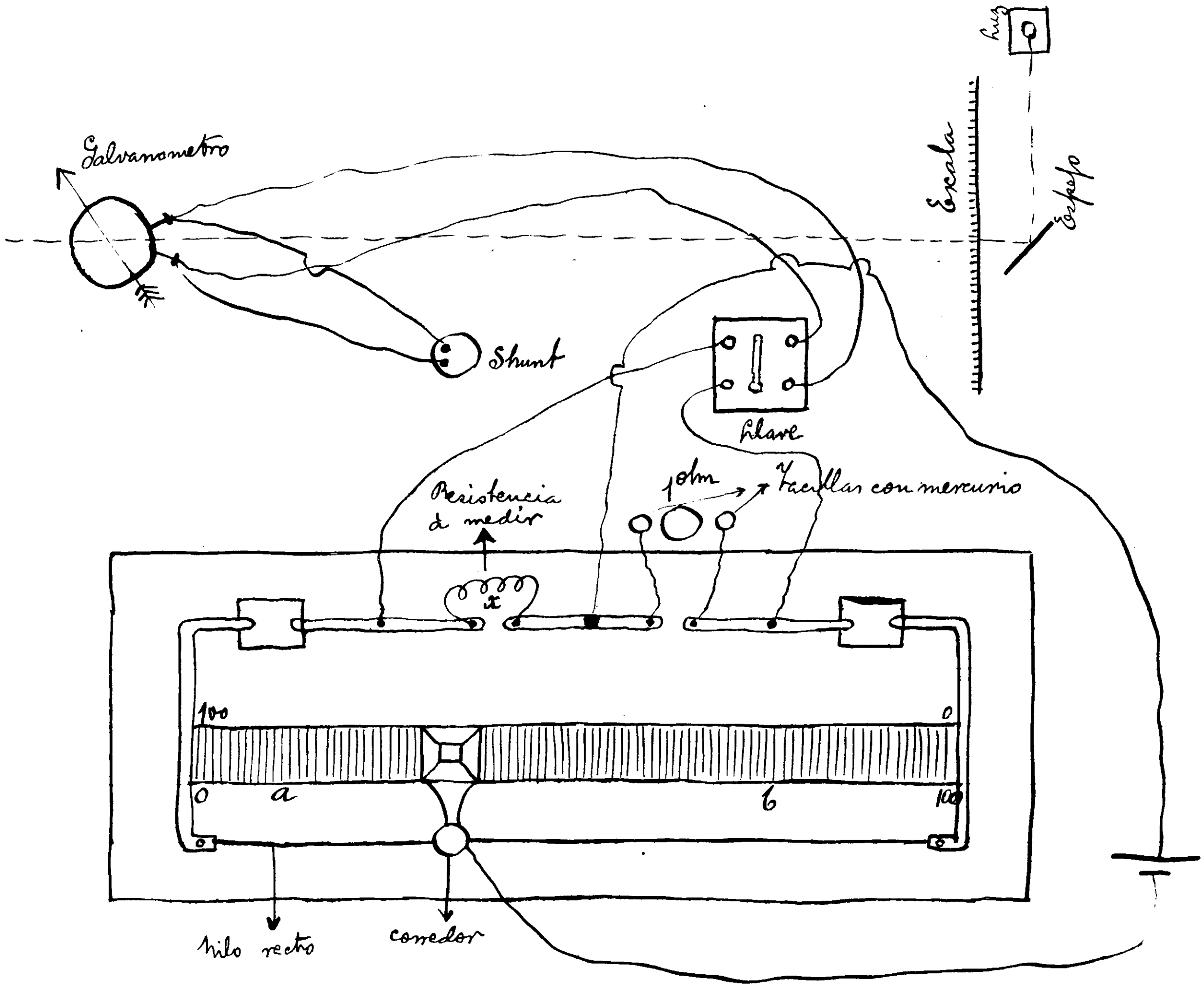
siempre que el hilo en toda su longitud tenga la misma sección é igual resistencia especifica. Paralelamente á este hilo existe una regla en la cual se leen los valores $\underline{l}$ y $\underline{l'}$ cuyo cociente es la resistencia buscada.

La sensibilidad relativa tendrá por expresión

$$\frac{\frac{l}{l'}}{\frac{l'-l}{l'^2}} = \frac{l . l'}{l'-l} = \frac{l}{1-\frac{l}{l'}}$$

y se ve que conviene sea proximamente $l = l'$

La disposición general que se adopta para efectuar medidas con este puente es


Galvanometro
Shunt
Llave
Escala
Luz
Espejo
1 ohm
Tacillas con mercurio
Resistencia á medir
x
100
0
0
a
b
100
hilo recto
corredor

La regla ab tiene dos divisiones para leer directamente $l$ y $l'$. La medida de una resistencia se hace siguiendo la misma marcha ya descripta anteriormente, recorriendo con la corredera toda la longitud de la regla hasta que la desviación en el galvanometro (regulando convenientemente el shunt) sea nula.

Con este puente se midió la resistencia de un alambre, que dió

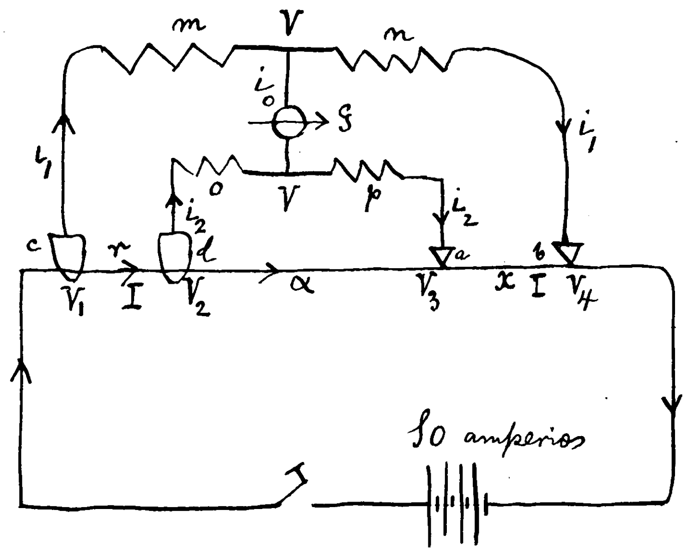
$$l = 51 \qquad l' = 49$$

$$\text{resistencia} = 1^{ohm},04$$

# Puente de Lord Kelvin

Los metodos anteriores no sirven para medir resistencias pequeñas como la de barras de hierro, pues que la resistencia de los contactos se añade á la del conductor, introduciendo de este modo un error notable en los resultados: el metodo del puente de Lord Kelvin permite eliminar la influencia de los contactos.

La resistencia á medir, se coloca entre los cuchillos a y b separados entre si por una distancia conocida: la resistencia de comparación r está comprendida entre los cuchillos c y d que pueden resbalar á lo largo de ella haciendo variar su valor de tal modo que la desviación en el galvanometro G sea nula; este se encuentra colocado entre las cuatro resistencias




variables m, n, p y o segun indica la figura, y las cuales estan elegidas de tal modo que se cumpla siempre la condición

$$(1) \quad \frac{m}{n} = \frac{o}{p}$$

---

Todo está intercalado en el circuito de una bateria de acumuladores que produzcan una corriente de 5 á 15 amperios, generalmente de 10. Como $i_0 = 0$ la coriente entre $V$ y $V_1$ es la misma que entre $V$ y $V_4$, así como también las comprendidas entre $V_2$ $V$ y $V_3$ respectivamente; por todo lo cual

$$i_1 m = V_1 - V \quad " \quad i_2 o = V_2 - V$$

$$i_1 n = V - V_4 \quad " \quad i_2 p = V - V_3$$

deduciendose

$$\frac{m}{n} = \frac{V_1 - V}{V - V_4} \quad " \quad \frac{o}{p} = \frac{V_2 - V}{V - V_3}$$

ó por la condición (1)

$$(2) \quad \frac{m}{n} = \frac{o}{p} = \frac{V_1 - V}{V - V_4} = \frac{V_2 - V}{V - V_3} = \frac{V_1 - V_2}{V_3 - V_4}$$

Llamando $I$ la intensidad de la corriente entre $V_1$ y $V_2$, $\underline{\alpha}$ la comprendida entre $V_2$ y $V_3$ será $I = i_2 + \alpha$ por lo cual la corriente que circula entre $V_3$ y $V_4$ será tambien $I$: se tendrá

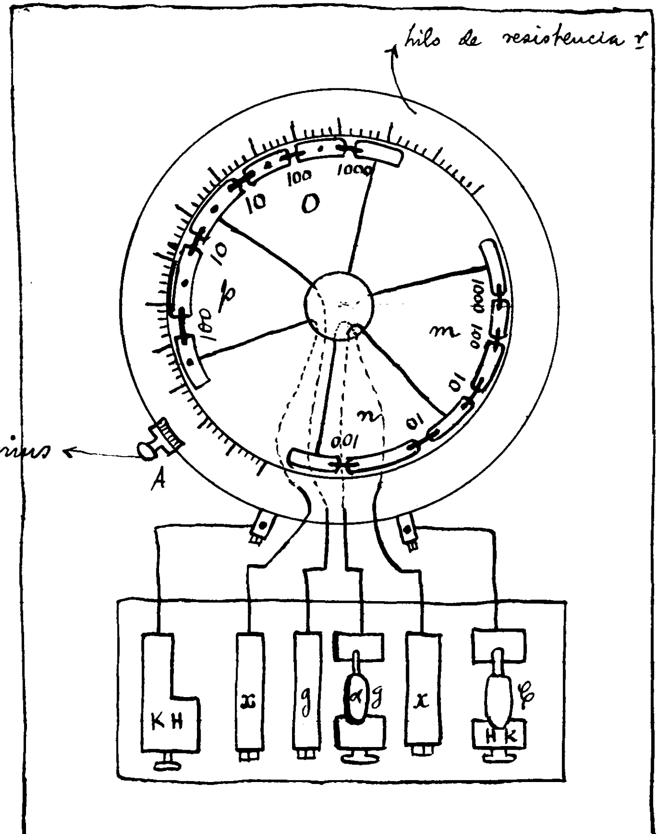
$$rI = V_1 - V_2 \quad " \quad xI = V_3 - V_4$$

$$\frac{r}{x} = \frac{V_1 - V_2}{V_3 - V_4}$$

por lo cual $\qquad (3) \quad \dfrac{r}{x} = \dfrac{m}{n} = \dfrac{o}{p}$

$$x = r \cdot \frac{n}{m} = r \cdot \frac{p}{O}$$

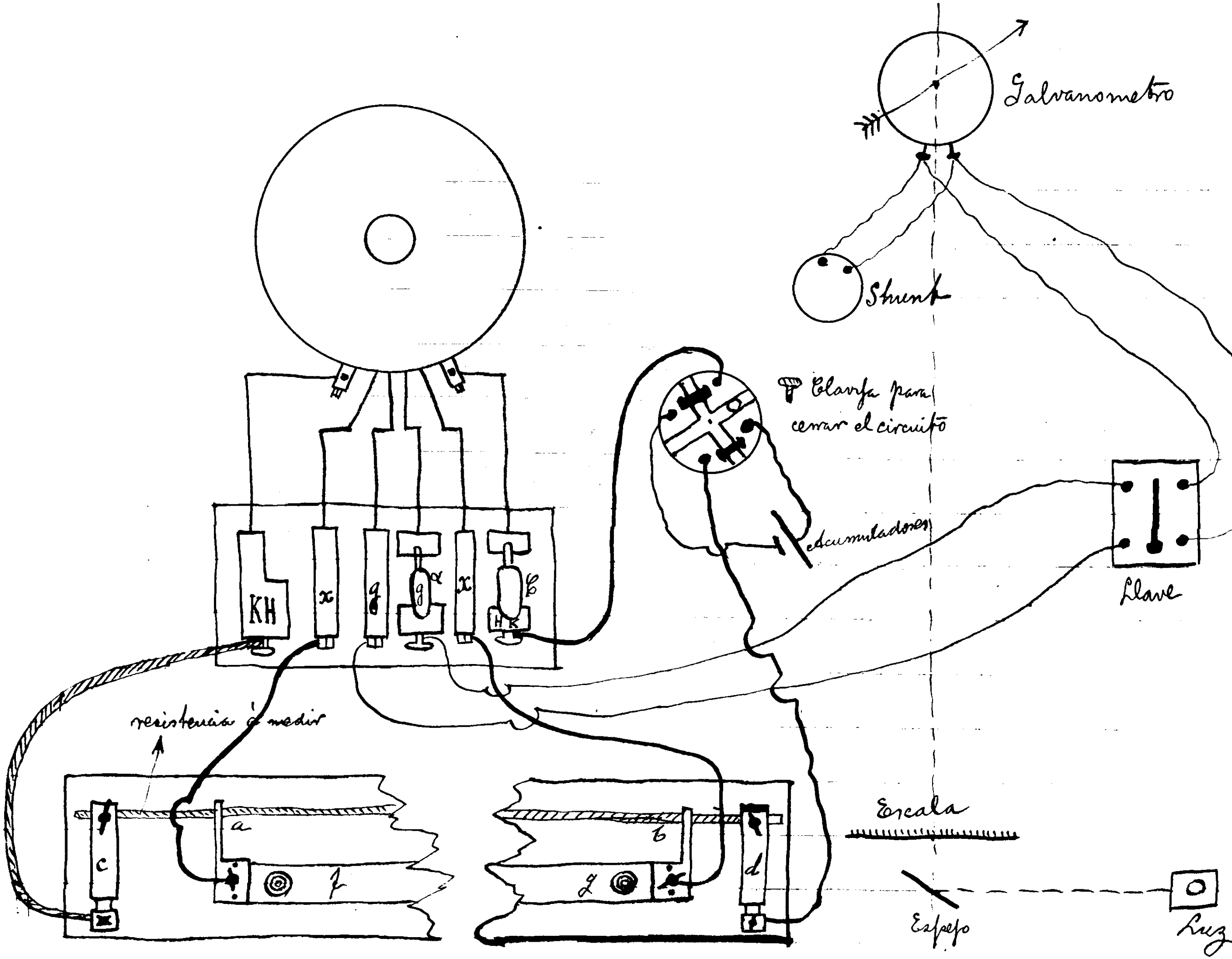
Las resistencias de contacto son despreciables ante las m, n, p, O á las cuales ellas se adicionan




La disposición practica que se dá á este puente, se ve claramente en la contigua figura. A es un corredor con nonius que se va apoyando en diferentes puntos del hilo de resistencia r tipo, enlazando este con la extremidad del brazo m y aquel con el final de O, de modo que variando su posición se modificará r. Los contactos entre p y O, m y n estan enlazados con las chapas metalicas g que se unen al galvanometro, conforme se deduce por el esquema anterior: analogamente las terminales de los brazos p y n se unen á las planchas metálicas x que se enlazan á las extremidades de la resistencia x á medir. Las dos piezas KH y HK se comunican con la batería de acumuladores, para hacer circular la corriente por el aparato: los circuitos del galvanometro y de la pila se cierran por las llaves α y E respectivamente. Las resistencias m y o pueden valer 10, 100 y 1000 ohmnios cada una de ellas, mientras que las p y n solamente 10 y 100 ohmnios.

El limbo y el nonius se encuentran graduados de tál modo que se puede llegar á apreciar de 2 en 2 microhmnios: el limite superior es de 0.1 ohms.

Para efectuar una medida de resistencia se adopta la disposición general siguiente conforme se indica en la figura: el trozo de cable ab cuya resistencia se busca, se coloca en una tabla cuya longitud es proximamente 1 metro, unido por sus dos extremos á dos piezas metalicas c y d cuya resistencia es cero aproximadamente: para fijar con mas exactitud los terminales en el cable, del trozo cuya resistencia se mide, hay una regla de madera fg que por dos bisagras gira á charnela sobre la tabla, poseyendo en sus extremos dos escuadras metálicas que establecen contacto con dos puntos del cable y con las piezas


Galvanometro
Shunt
Clavija para cerrar el circuito
Acumuladores
Llave
KH
x
g
g
α
x
β
HK
resistencia á medir
a
b
c
d
f
g
Escala
Espejo
Luz

x, x del puente por dos alambres gruesos de poca resistencia. Las dos placas g, g se unen por hilos con la llave de corto circuito que comunica con el galvanometro. Con objeto de que la corriente circule por la resistencia y el puente se une la placa c con la KH y la d con un polo del acumulador, mientras que el otro polo se enlaza con la HK. Cerrando las dos llaves α y β, poniendo el shunt conveniente, estableciendo la relación $\frac{m}{n} = \frac{o}{p}$ necesaria y moviendo el corredor, se puede llegar á una posición de este tal, que la desviación del galvanometro leida en la escala sea nula; multiplicando por $\frac{n}{m}$ la r observada con el nonius se tendrá la x

Se hizo la medida de la resistencia de un cable y se encontró

$$x = 0^{ohms},001087$$

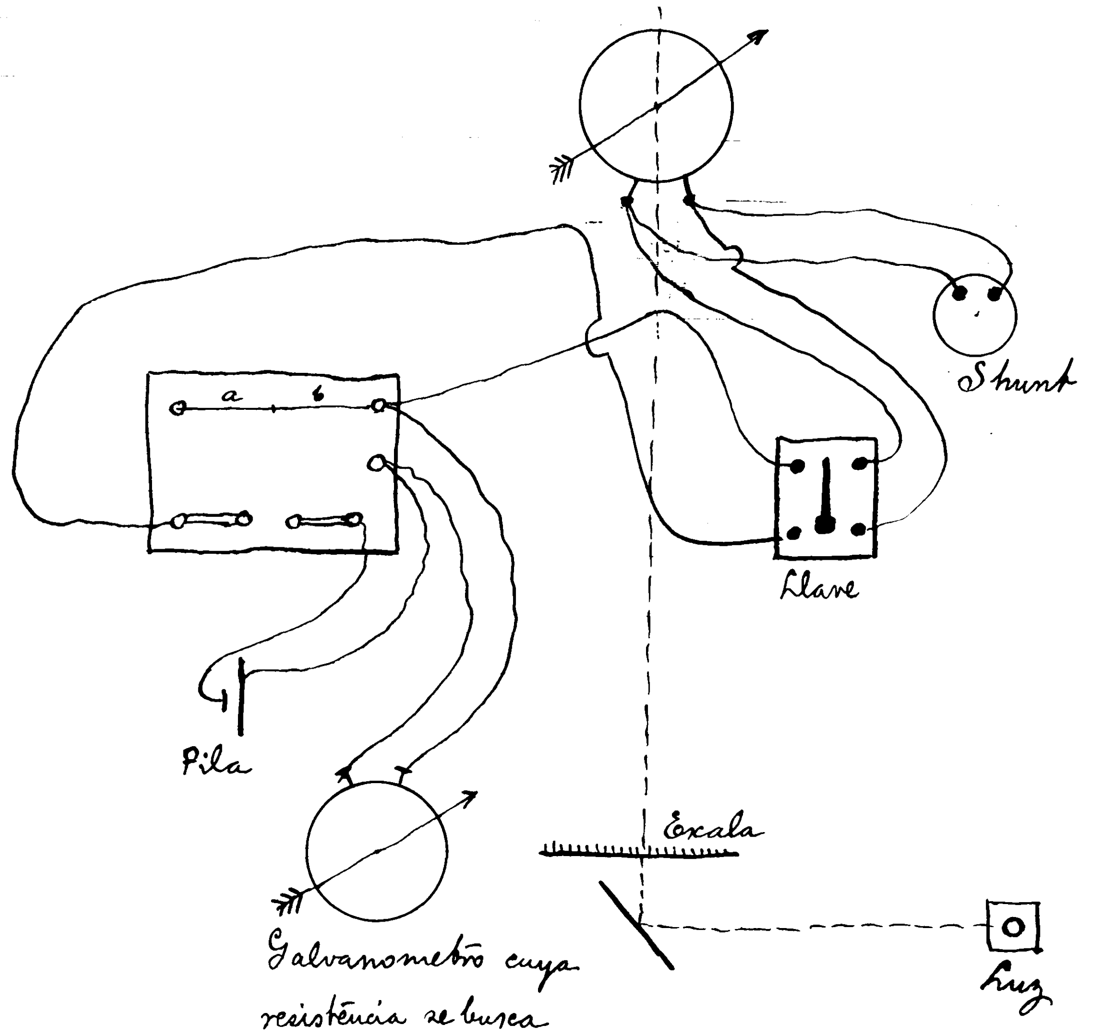
Si se tratase de resolver el problema inverso, es decir encontrar la longitud de un cable cuya resistencia se presupone, se colocaría en la división conveniente el nonius despues de establecer la relación $\frac{m}{n} = \frac{o}{p}$, situando en los terminales del alambre ó cable dos gruesas piezas metalicas que lo uniesen con el polo de un acumulador y con la placa KH y luego otras dos con las piezas x del puente de tal modo, que una de estas pinzas se fije fuertemente á uno de sus puntos y la otra se la cambie de posición hasta conseguir que la desviación en el galvanometro sea nula, no quedando entonces mas que medir la longitud encontrada. Asi se halló para un alambre dado una longitud de $0^{m}.75$ para $0^{ohm}.03$ de resistencia

# Resistencia de un galvanometro

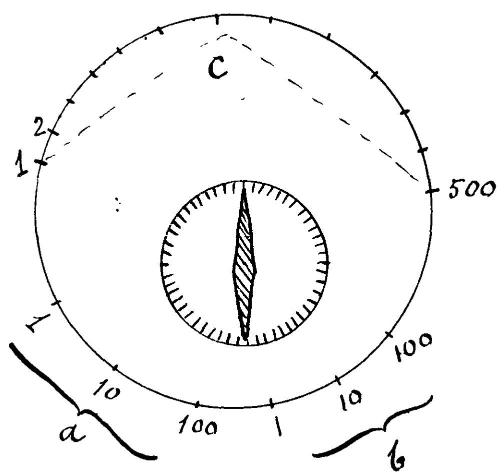
Hay varios metodos para medir la resistencia de galvanometro pero no nos ocuparemos mas que de dos: Metodo del puente de Wheatstone y metodo de Lord Kelvin

Metodo del puente de Wheatstone. Consiste en adoptar la misma disposición que si fuese á medirse con tal aparato una resistencia cualquiera tomando solamente la precaución de poner unos tacos de papel en el galvanometro para que al pasar la corriente no se mueva y tuerza el hilo. Se necesita por tanto otro galvanometro para hacer lecturas.

Asi pues, se adoptará la disposición siguiente, que es en esencia la misma que antes se empleó.


a
b
Shunt
Llave
Pila
Excala
Luz
Galvanometro cuya
resistencia se busca

Si no se tuviese otro galvanometro, se puede usar, aplicando el mismo metodo una caja de resistencia Siemens-Halske que llevan una aguja imantada astatica, conservando una dirección cualquiera, aun cuando no sea la magnetica: en su interior tienen un sistema de pilas llamadas secas que sirven para dar corriente al circuito que se forma con el galvanometro, el cual se enlaza con dos botones que presenta dicha caja. Un esquema del conjunto de resistencias que presentan los brazos <u>a</u>, <u>b</u>, c es el adjunto. La relación $\frac{b}{a}$ fijada, no hay mas que variar el brazo <u>c</u> hasta conseguir que cerrando el circuito por medio de la llave, la aguja permanezca en la misma posición que en un principio tenía, quedando de este modo determinada la resistencia del galvanometro.

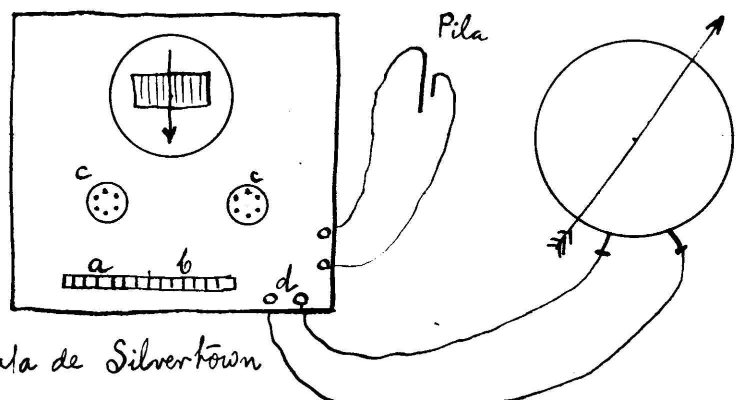



En estos dos metodos hay siempre que restar la resistencia de los hilos de enlace para obtener la resistencia del galvanometro

Se midió la resistencia de un galvanometro balistico auxiliandose de otro tambien balistico de movimiento muy majestuoso y se encontró empleando la relación de $\frac{100}{100}$ que estaba comprendida entre 203 ohmnios á 204; pero usando la de $\frac{10}{1000}$ se vió 203,4 á 203,5 ohmnios: los hilos de unión dieron una resistencia de 0,14 á 0.15 ohm, resultando pues que

$$g = 203,305 \text{ ohms}$$

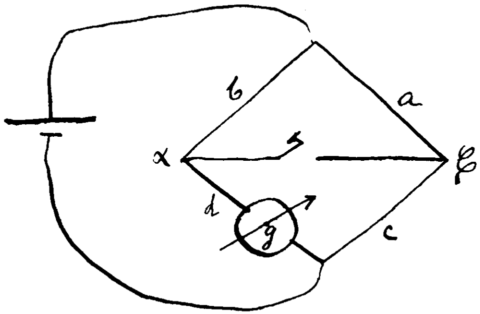
Se puede también usar para medir resistencias de galvanometros cuando no se dispone mas de uno, una caja de resistencia, con sistema imantado astatico como las de Siemens-Halske pero sin pilas secas en su interior: los hilos del galvanometro se unen á dos botones metalicos. La marcha que se sigue es la misma que antes.




Caja de Silvertown

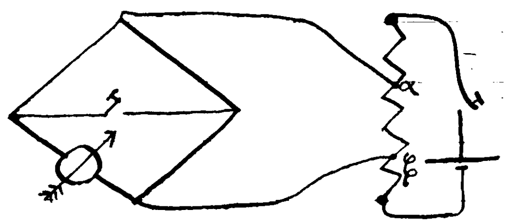
# Metôdo de Lord Kelvin

Este metôdo es tambien de reducción á cero, y consiste en colocar el galvanometro de resistencia á medir en el brazo d de un puente de Wheatstone: abriendo ó cerrando la llave de ruptura de la diagonal $\alpha\beta$, se procura, colocando la resistencia c conveniente, que el galvanometro permanezca invariable. Esto indica que la corriente que circula por $\alpha\beta$ es nula y por tanto que se realiza la propiedad fundamental

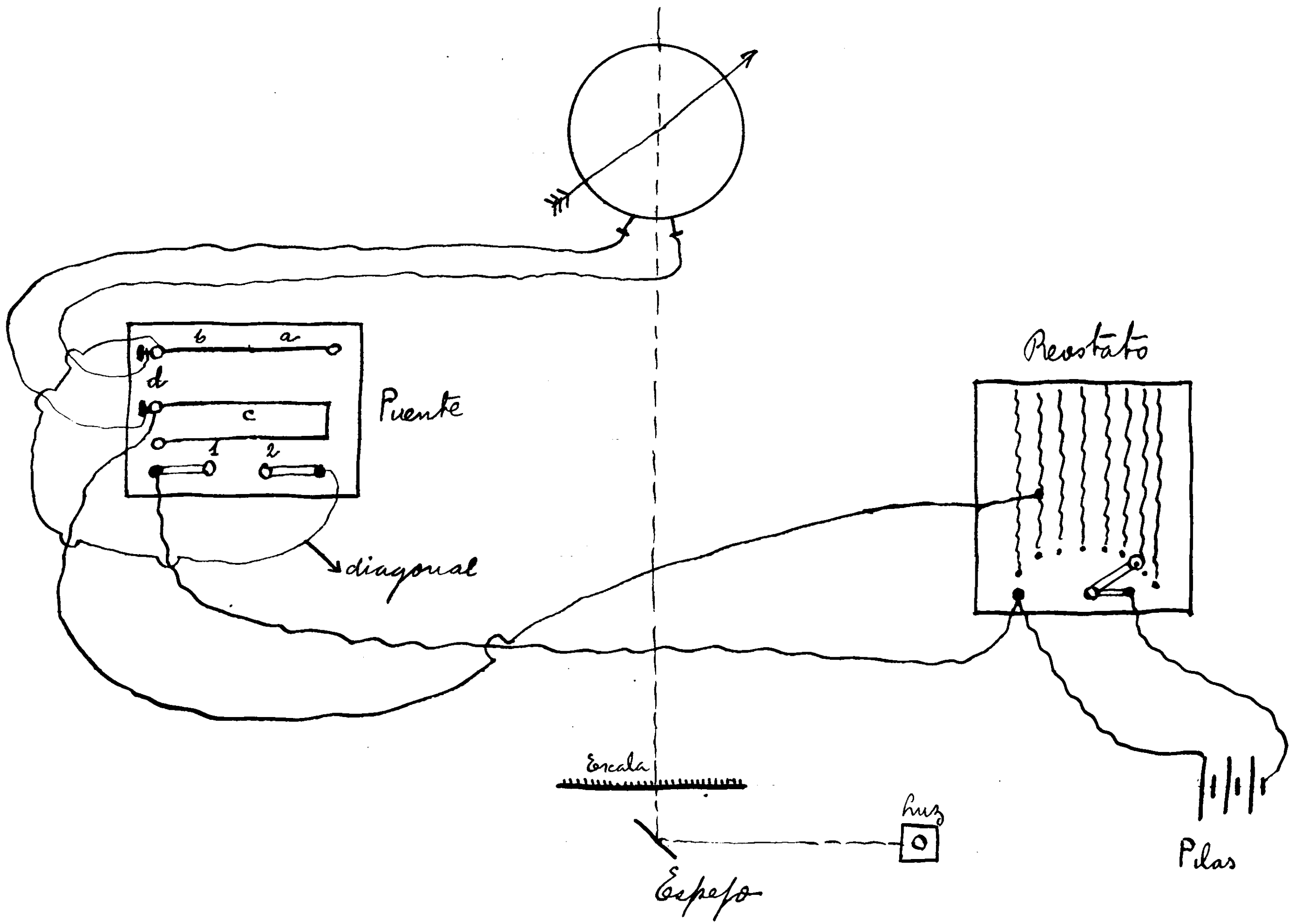



$$g = \frac{b}{a} \cdot c$$

Con objeto de que la corriente que pase por el puente no sea muy intensa y produzca torziones permanentes en el hilo de suspensión del galvanometro, se shunta la pila como se indica en la figura estableciendo la unión en los puntos $\alpha$ y $\beta$ convenientes para conseguir tal resultado.




La disposición general que se adopta es la siguiente, que se compre


b
a
d
c
1
2
Puente
diagonal
Reostato
Escala
Luz
Espejo
Pilas

ba facilmente está conforme con el esquema anterior. La llave 2 es la que cierra ó abre la diagonal, y la 1 cierra el circuito que atraviesa la corriente. Asi pues, el metodo que se sigue es: poner en el brazo c tal resistencia, despues de fijar la relación $\frac{b}{a}$, que cerrando la llave 1 la desviación del galvanometro no sea muy grande no saliendose la imagen de los limites de la escala, despues de lo cual abriendo ó cerrando la llave 2 la desviación debe permanecer la misma, siendo preciso para conseguir tal resultado que se modifique á c convenientemente. La resistencia buscada será $\frac{b}{a} \cdot c$

Aplicando este procedimiento al galvanometro Deprez-D'Arsonval, con la relación $\frac{100}{100}$ se encontró que estaba comprendida entre 202 ohms y 203: modificando la relación y adoptando la $\frac{10}{1000}$ se halló 202,3 ohms definitivamente.

## Galvanometro Deprez-D'Arsonval

Este galvanometro, cuyo uso se ha extendido considerablemente, se compone de un iman en herradura Jamin entre cuyos dos polos se encuentra suspendido un cuadro rectangular por medio de dos hilos metalicos que dan acceso á la corriente, que tiende á colocar esta bobina de su posición inicial paralela á la linea de los polos, segun una perpendicular á la misma, de no existir el par antagonista de torsión que lo detiene en el angulo de equilibrio $\alpha$. Como la acción electromagnetica tiene por expresión, segun es facil deducir, $H.s.n.i$, siendo $H$ la intensidad uniforme del campo magnetico, $s$ la sección de la bobina, $n$ el numero de cuadros paralelos que la forman é $i$ la intensidad de la corriente que la atraviesa, se tendrá la igualdad

$$H.s.n.i = c.\alpha$$

pues el segundo miembro es el momento del par antagonista, siendo $c$ la constante de torsión, es decir el momento del par de torsión del hilo por unidad de angulo. Se vé pues que $i = K.\alpha$

siendo $K$ la constante del galvanometro. —

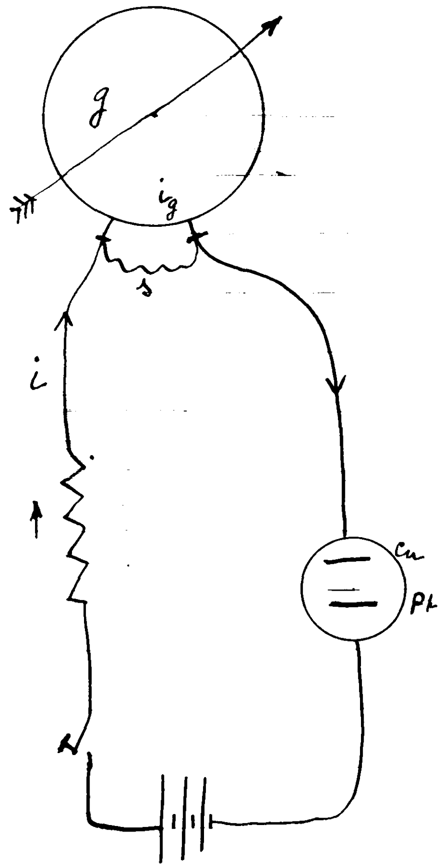
La principal ventaja de estos aparatos, es que son aperiodicos es decir que en el momento en que se lanza la corriente, el cuadro movil pasa sin oscilación de su posición primera de equilibrio á la segunda, permitiendo abreviar considerablemente las operaciones y aun medir en cada instante la intensidad de una corriente variable. Esta propiedad de la aperiodicidad se verifica cuando el galvanometro está en <u>corto circuito</u>, es decir cuando se pone el aparato en circuito de debil resistencia, pues entonces el cuadro al moverse en el campo magnetico engendra una fuerza electromotriz de auto-inducción que da origen á una corriente inducida cuyo sentido es tal, que segun la ley de Lenz se opone al movimiento de oscilación. Cuando el circuito esta abierto, estas circunstancias no tienen lugar y el aparato se amortigua en sus movimientos oscilatorios merced á la resistencia del aire; por eso para detenerle rapidamente se pone en corto circuito

## Constante galvanometrica

Para graduar un galvanometro como amperimetro, precisa conocer la constante $K$ por la cual hay que multiplicar la desviación leida para obtener el valor de la intensidad de la corriente. Para tal fin realizaremos el esquema siguiente, en el cual $i$ es la corriente general producida por las pilas, que se descompone en $i_g$ é $i_s$ que pasan por el galvanometro y por el shunt

$$i = i_g + i_s$$

Llamando $g$ la resistencia del galvanometro, se tendrá aplicando la segunda ley de Kirkoff al circuito formado por el shunt y el




$$i_g \cdot g = i_s \cdot s \quad " \quad \frac{i_g}{i_s} = \frac{s}{g} \quad \text{de donde}$$

$$i = i_g \cdot \frac{s+g}{s}$$

mas por la teoría del galvanometro _ Deprez

$$i_g = K \cdot \alpha$$

luego

$$(1) \quad i = K \cdot \alpha \cdot \frac{s+g}{s}$$

En el circuito general _ hay una disolución de sulfato de cobre en un vaso de vidrio, dentro del cual se introducen una barrita de Cu y una lamina de Pt en la cual se deposita el Cu que resulta de la descomposición del electrolito, mientras se va disolviendo en la solución acida el metal. Conociendo el peso de Cu depositado durante t'' se puede sacar el valor de la intensidad de la corriente por la ley de Faraday en electrolisis, que dice

$$q\,(Cu) = i \times t'' \times \text{equivalente electroquimico}$$

$$q^{(cu)} = \iota \times t'' \times 0^{\text{gramos}},000329$$

luego

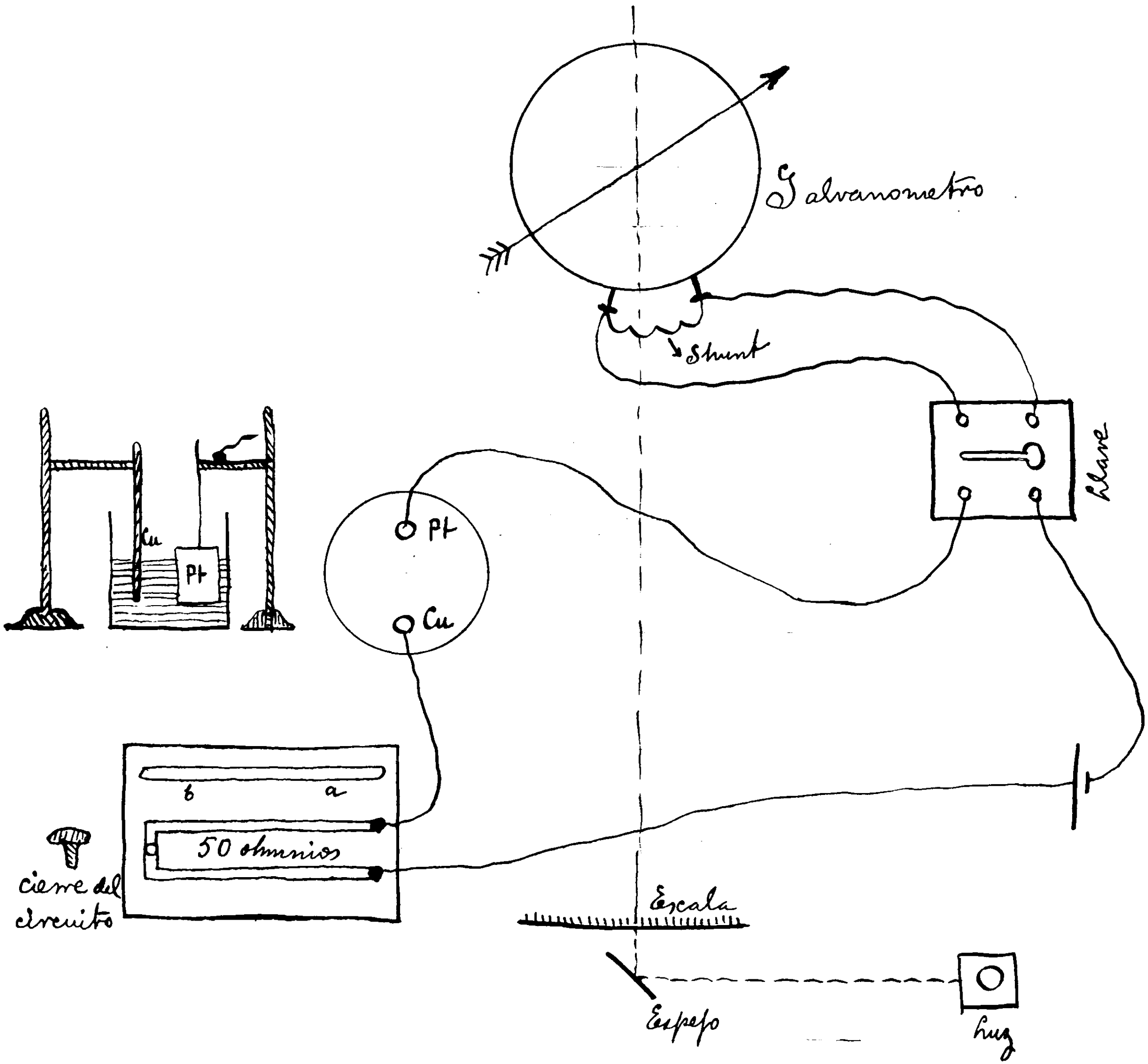
$$\iota = \frac{q^{(cu)}}{t'' \times 0^{g},000329} = K.\alpha.\frac{s+g}{s}$$

de donde

$$(2) \qquad K = \frac{q^{(cu)} \times s}{t'' \times 0^{g},000329 \times \alpha \times (s+g)}$$

que es el valor buscado. Así pues, conociendo de antemano, s y g, no habrá mas que efectuar la operación durante un cierto tiempo $t''$, leyendo los valores $\alpha$ para tomar su media arithmetica, y pesar el cobre $q$ (gramos) que se haya depositado durante este intervalo.

La disposición practica que se dá á esta operación está indicada en la siguiente figura conforme en todo con el esquema anterior: la llave de corto circuito durante el tiempo que la corriente circula debe estar cerrada con una cuña de madera ó papel. La lamina de Pt debe pesarse cuidadosamente antes de colocarla en contacto con el electrolito: se anota la desviación del galvanometro leida en la escala y si fuera bastante pequeña se echa más $SO_4H_2$ en el baño para hacer


Galvanometro
Shunt
Llave
Cu
Pt
Pt
Cu
b
a
50 ohmnios
cierre del circuito
Escala
Espejo
Luz

mas conductor al liquido disminuyendo la resistencia.

Cuando se hizo esta medida, se colocó primeramente en la caja de resistencias unos 10 ohmnios y en el galvanometro un shunt de $0^{ohms},03$ formandose muy rapidamente un deposito de cobre demasiado abundante, por todo lo cual y para evitar esta tumultuosidad en la marcha de los iones se puso un shunt de resistencia entre $0^{ohm},10$ á $0^{ohm}.11$ con objeto de obtener una desviación mayor en la escala, asi como tambien 50 ohms en el puente: en estas circunstancias el deposito de Cu fué bastante satisfactorio. El circuito se cerró á las $10^h,39'$ del 25 de Noviembre y se abrió á las $15^h.20$ del mismo por lo cual

$$t'' = 4^h.41' = 16860''$$

El peso del cilindro de platino fue $21^{gramos},133$ sin deposito de Cu y de $21^{gramos},376$ con el, por lo cual

$$q = 0^g,243 \ (Cu)$$

Las desviaciones anotadas fueron, teniendo presente que el origen de las mismas es 250

$$\alpha = 52,75$$

$$\alpha' = 42,5$$

ó sea

$$\frac{\alpha+\alpha'}{2} = 47,625$$

Sustituyendo estos tres valores en la formula (2) se tendrá, recordando que para el galvanometro Deprez-D'Arsonval $g = 202,3$

$$K \doteq \frac{0,243 \times 0,105}{16860 \times 0,000329 \times 47,625 \times 202,405}$$

$\log 243 = 2,38560627$ $\log 16860 = 4,2268576$

$\log 105 = 2,02118930$ $\log 329 = 2,5171959$

$\log 47,625 = 1,6778350$ $\log 202,405 = 2,3062213$

$$\log K = \bar{7},6786858$$

$$K = 0,000000477184$$

Es necesario tomar la precaución, de que el alambre de Cu sea lo suficientemente grueso para que no se gaste durante el tiempo que dura la operación, pues en ese caso el circuito queda roto: esto fué lo que ocurrió, cuando se hizó la primera tentativa de hallar K para el galvanometro Deprez-D'Arsonval

Para el galvanometro balistico, se empleó el mismo shunt de resistencia $0^{ohm},105$ con una de 100 ohms en el puente, siendo las lecturas anotadas

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 141\\ \alpha' = 38,5\end{array}\right\} \frac{\alpha+\alpha'}{2} = 89,75$$

y el tiempo transcurrido

$$t'' = 7260'' = 2^{\text{horas}}\, 1'$$

El peso del cobre depositado fue

$$q = 0^{g},511$$

por lo cual, teniendo presente que la resistencia del galvanometro balístico es

$$g = 203,305$$

se tendrá

$$K = \frac{0,511 \times 0,105}{7260 \times 0,000329 \times 89,75 \times 203,41}$$

$\log 511 = 2,7084209$

$\log 105 = 2,0211893$

$\log 89,75 = 1,9530345$

$\log 7260 = 3,8609366$

$\log 329 = 2,5171959$

$\log 203,41 = 2,3083723$

$$\log K = \bar{6},0900709$$

$$K = 0.00000/123047$$

/0

La lamina de platino en que se deposita el Cu debe ser redondeada para evitar que el deposito sea poco adherente sobre las aristas, debiendosela bañar previamente en $NO_3H$, para desolver cualquier residuo que pueda contener, lavandola despues con $H_2O$

y alcohol para secarla en una estufa antes de averiguar su peso : se debe evitar el tocarla con los dedos para no dañar al deposito. Cuando la operación termina, con objeto de impedir la oxidación del Cu, se lava con agua ligeramente acidulada con $SO_4H_2$ y despues con alcohol, para secarla y pesarla despues. La intensidad de corriente que más conviene es de 1 ampere por décimetro cuadrado de superficie de catodo, debiendo la disolución de $SO_4Cu$ tener una densidad comprendida entre 1,10 á 1,15 con un 5 por 100 de $SO_4H_2$

# Galvanometro balistico

En las medidas sucesivas que hagamos de diferencia de potencial y permeabilidad magnetica el uso del galvanometro balistico se impone : se trata entonces de medir una cantidad de electricidad que pasa bruscamente, como la descarga de un condensador, lo cual se consigue mediante un galvanometro cuyo momento de inercia sea bastante grande para que su equipaje no se mueva sensiblemente durante la descarga. Su teoria puede establecerse del modo siguiente.

El principio en que se apoya es el teorema fundamental de Mecánica que dice es la derivada con relación al tiempo de la suma de los momentos de las cantidades de movimiento del sistema, igual á la suma de los momentos de los pares agentes

$$\frac{d}{dt}\Sigma\, m v r = \Sigma\, \mathcal{C}$$

En el caso presente, el movimiento de rotación del cuadro alrededor de su hilo de suspensión, está definido por las relaciones

$$v = w . r \quad " \quad w = \frac{d\alpha}{dt}$$

luego

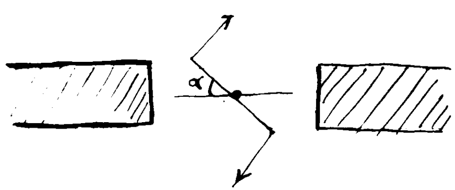
$$\Sigma\, \mathcal{C} = \frac{d}{dt}\Sigma\, m r^2 \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d^2\alpha}{dt^2} . \Sigma\, m r^2 = I . \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

siendo I el momento de inercia, del cuadro con relación al eje.

Para que la ecuación quede completamente conocida, preciso es hallar el valor de $\Sigma\mathcal{C}$ que está compuesto de los siguientes terminos

1º. Par electromagnetico acelerador : el trabajo al recorrer el angulo $\alpha$ es segun la regla de Faraday para las n espiras

$$\mathcal{H} . i . s . n . \operatorname{sen}\alpha = \mathcal{H} . s . i . n . \alpha$$



luego el par correspondiente

$$\mathcal{H} . s . i . n$$

2º. Par resistente, originado por la torsión del hilo de suspensión igual á $c . \alpha$

3º. — Par amortiguador, debido á la resistencia del cuadro á moverse en el aire por el frotamiento: como es nulo, cuando la velocidad se hace cero, se le puede considerar proporcional á ella é igual á $f.\frac{d\alpha}{dt}$ en consecuencia.

4º. — Par amortiguador ocasionado por las corrientes de inducción que se desarrollan en el cuadro, aun despreciando la fuerza de autoinducción de las espiras de este: la expresión de la fuerza electromotriz de inducción

$$e = \frac{d\Phi}{dt}.$$

será en este caso $$e = \frac{d}{dt}(\mathcal{H}.s.n.\operatorname{sen}\alpha) = \frac{d}{dt}(\mathcal{H}.s.n.\alpha) = \mathcal{H}.s.n.\frac{d\alpha}{dt}$$

y la intensidad de la corriente inducida, llamando $R$ la resistencia del cuadro

$$i_1 = \frac{\mathcal{H}.s.n}{R}.\frac{d\alpha}{dt}$$

y su par correspondiente por la misma razon ya expuesta

$$i_1.\mathcal{H}.s.n = \frac{\mathcal{H}^2.s^2.n^2}{R}.\frac{d\alpha}{dt}$$

La ecuación del movimiento, tomará pues esta nueva forma

$$(1)\quad I.\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(f + \frac{\mathcal{H}^2.s^2.n^2}{R}\right).\frac{d\alpha}{dt} + c.\alpha = \mathcal{H}.s.n.i$$

pues excepto el primero, los restantes son pares antagonistas

Conforme se ha supuesto, la aguja del galvanometro, durante el intervalo $\tau$ que dura la descarga no se mueve, es decir $\alpha = 0$ cuando $t = 0$ y $t = \tau$: multiplicando por $dt$ é integrando entre $0$ y $\tau$ la ultima ecuación diferencial

se tendrá $$I.\frac{d\alpha}{dt} = \mathcal{H}.s.n.\int_0^{\tau} i.dt = \mathcal{H}.s.n.q$$
siendo $q$ la cantidad de electricidad inducida

Despues de la descarga, la intensidad $i$ se anula por lo cual
$$I.\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \left(f + \frac{\mathcal{H}^2.s^2.n^2}{R}\right).\frac{d\alpha}{dt} + c.\alpha = 0$$
y haciendo
$$a = \frac{f}{2I} + \frac{\mathcal{H}^2.s^2.n^2}{2RI}$$
$$b = \sqrt{\frac{c}{I}}$$
se transforma en $$(2) : \frac{d^2\alpha}{dt^2} + 2a.\frac{d\alpha}{dt} + b^2.\alpha = 0$$
Haciendo
$$\alpha = A.e^{mt} \quad '' \quad \alpha' = m.A.e^{mt} \quad '' \quad \alpha'' = m^2 A.e^{mt}$$
se encuentra $$A.e^{mt}(m^2 + 2am + b^2) = 0$$
por tanto la ecuación diferencial queda satisfecha si se cumple la condición
$$m^2 + 2am + b^2 = 0$$
cuyas raíces son
$$m_1 = -a + \sqrt{a^2 - b^2}$$
$$m_2 = -a - \sqrt{a^2 - b^2}$$

reales si $a > b$: la integral general de (2) tendrá la forma

$$\alpha = A\, e^{m_1 t} + B \cdot e^{m_2 t}$$

siendo $A$ y $B$ constantes: ó bien

$$(3) \qquad \alpha = e^{-at}\left[A \cdot e^{t\sqrt{a^2-b^2}} + B \cdot e^{-t\sqrt{a^2-b^2}}\right]$$

Como para $t=0$, $\alpha=0$, las constantes $A$ y $B$ satisfacen á la condición

$$A + B = 0$$

En estas condiciones $(a > b)$ el galvanometro es aperiodico, pues

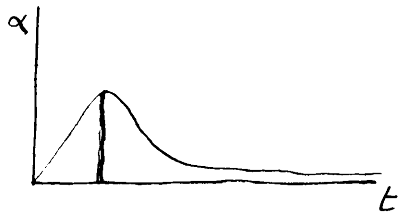
$$\alpha = \frac{1}{e^{at}}\left[A \cdot e^{mt} + B \cdot e^{-mt}\right]$$

$$m = \sqrt{a^2-b^2} < a$$

ó bien

$$\alpha = \frac{A}{e^{(a-m)t}} + \frac{B}{e^{(a+m)t}}$$

función que se hace cero solamente para $t=0$ y $t=\infty$, siendo siempre positiva, ó sea que la aguja no sufre oscilaciones: pasa de cero á su posición de desviación maxima, decreciendo asimptoticamente otra vez á cero segun indica la siguiente curva. Para encontrar el valor de $t$ que hace maximo á $\alpha$.




escribamos

$$\frac{d\alpha}{dt} = 0 = -A(a-m).e^{-(a-m)t} - B.(a+m).e^{-(m+a)t}$$

ó bien

$$A(a-m).e^{2mt} + B.(a+m) = 0$$

pero como $\quad A + B = 0$

$$e^{2mt} = \frac{a+m}{a-m}$$

de donde

$$t = \frac{1}{2m}.\log\frac{a+m}{a-m}$$

Supongamos ahora que $a < b$; entonces la solución (3) toma forma de imaginaria pudiendose pasar mediante las formulas de Euler á lineas trigonometricas ó bien, seguir el siguiente artificio haciendo

$$\alpha = C.e^{\beta t}.\cos(\beta' t + C')$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = C.\beta.e^{\beta t}.\cos(\beta' t + C') - C.\beta'.e^{\beta t}.\operatorname{sen}(\beta' t + C')$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = C.\beta^2.e^{\beta t}.\cos(\beta' t + C') - 2C.\beta\beta'.e^{\beta t}.\operatorname{sen}(\beta' t + C') - C.\beta'^2.e^{\beta t}.\cos(\beta' t + C')$$

valores que sustituidos en la ecuación (2) dan despues de dividir por $C.e^{\beta t}$

$$\cos(\beta' t + C')\left[\beta^2 - \beta'^2 + 2a\beta + b^2\right] - \operatorname{sen}(\beta' t + C')\left[2\beta\beta' + 2a\beta'\right] = 0$$

ecuación que se satisface con las condiciones

$$\beta^2 - \beta'^2 + 2a\beta + b^2 = 0$$

$$2\beta\beta' + 2\beta' a = 0$$

de donde $\qquad \beta = -a \qquad \beta' = \sqrt{b^2 - a^2}$

luego la solución general será

$$\alpha = \mathcal{C}.e^{-at}.\cos\left[\sqrt{b^2-a^2}.\,t + \mathcal{C}'\right]$$

que se puede poner bajo la forma

$$(4) \quad \alpha = e^{-at}\left[\mathcal{A}.\cos t.\sqrt{b^2-a^2} + \mathcal{B}.\,\text{sen}\,t.\sqrt{b^2-a^2}\right]$$

siendo $\qquad \mathcal{A} = \mathcal{C}.\cos\mathcal{C}' \qquad \mathcal{B} = -\mathcal{C}.\,\text{sen}\,\mathcal{C}'$

Para hallar el valor de las constantes $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ en función de cantidades conocidas, será necesario introducir las condiciones

$$t = 0 \qquad \alpha = 0$$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{\mathcal{H}.s.n.q}{I}$$

dando la primera $\qquad \mathcal{A} = 0$

Como de (4) se saca

$$(5) \quad \frac{d\alpha}{dt} = -a.e^{-at}\left[\mathcal{A}.\cos t.\sqrt{b^2-a^2} + \mathcal{B}.\,\text{sen}\,t.\sqrt{b^2-a^2}\right] + e^{-at}\left[-\mathcal{A}.\sqrt{b^2-a^2}\,\text{sen}\,t\sqrt{b^2-a^2} + \mathcal{B}.\sqrt{b^2-a^2}\cos\sqrt{b^2-a^2}\,t\right]$$

haciendo $t = 0$

$$\frac{d\alpha}{dt} = \mathcal{B}.\sqrt{b^2-a^2}$$

luego

$$\mathcal{B}.\sqrt{b^2-a^2} = \frac{\mathcal{H}.s.nq}{I}$$

Las expresiones (4) y (5) se transforman en virtud de estos valores

$$(6) \quad \alpha = \frac{\mathcal{H}.s.nq}{I.\sqrt{b^2-a^2}}.e^{-at}.\,\text{sen}\,t\sqrt{b^2-a^2}$$

$$(7) \qquad \frac{d\alpha}{dt} = e^{-at}\left[\frac{\mathcal{H}.s.n.q}{I}\cos t\sqrt{b^2-a^2} - \frac{a.\mathcal{H}.s.n.q}{I\cdot\sqrt{b^2-a^2}}\operatorname{sen} t\sqrt{b^2-a^2}\right]$$

En el caso considerado $(a<b)$ el galvanometro es periodico, pues la formula (6) indica que á medida que $t$ va creciendo, la desviación $\alpha$ unas veces es positiva y otras negativa, pues su signo depende del de $\operatorname{sen} t\sqrt{b^2-a^2}$; al mismo tiempo, por entrar en el denominador $e^{at}$, la desviación $\alpha$ va decreciendo constantemente

La velocidad angular $\frac{d\alpha}{dt}$ se hace cero cuando

$$\frac{\mathcal{H}.s.n.q}{I}.\cos t\rho = \frac{a.\mathcal{H}.s.n.q}{I\rho}\operatorname{sen} t\rho$$

$$\rho = \sqrt{b^2-a^2}$$

ó sea cuando

$$\operatorname{tag} t\rho = \frac{\rho}{a}$$

$$\operatorname{sen} t\rho = \frac{\rho}{\sqrt{a^2+\rho^2}}$$

Asi pues, el tiempo que dura la primera desviación es

$$t_1 = \frac{1}{\rho}\operatorname{arc\,tag}\frac{\rho}{a}$$

y ella valdrá [6]

$$\alpha_1 = \frac{\mathcal{H}.s.n.q}{I.\rho}\cdot\frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+a^2}}\cdot e^{-\frac{a}{\rho}.\operatorname{arc\,tag}\frac{\rho}{a}}$$

Pero la velocidad angular también se anula para

$$\operatorname{tag} t_2 \rho = \operatorname{tag}(t_1 \rho + \pi)$$

pues

$$\operatorname{sen} t_2 \rho = \frac{\operatorname{tag} t_1 \rho}{\sqrt{1+\operatorname{tag}^2 t_1 \rho}} = \operatorname{sen} t_1 \rho$$

$$\cos t_2 \rho = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tag}^2 t_1 \rho}} = \cos t_2 \rho$$

Luego la anulación se verifica también en el instante

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\rho}$$

y en general para

$$t_n = t_{n-1} + \frac{\pi}{\rho} = t_{n-2} + 2\frac{\pi}{\rho} = t_{n-3} + 3\frac{\pi}{\rho} = \ldots\ldots$$

ó bien

$$t_n = \frac{\pi}{\rho}(n-1) + t_1$$

La amplitud de la enesima desviación valdrá

$$\alpha_n = e^{-a t_n} \cdot \frac{M.s.n.q}{I.\rho} \operatorname{sen}\left[t_1 \rho + (n-1)\pi\right]$$

y como

$$\alpha_1 = \frac{M.s.n.q}{I.\rho} \cdot \operatorname{sen} t_1 \rho \cdot e^{-a t_1}$$

se tendrá

$$\alpha_n = (-1)^{n-1}\alpha_1 . e^{-a(n-1).\frac{\pi}{\rho}} \quad ; \quad \left[\operatorname{sen}(K\pi + a) = (-1)^K . \operatorname{sen} a\right]$$

Examinando los instantes en los cuales la velocidad angular se anula

$$t_1 \quad ; \quad t_1 + \frac{\pi}{\rho} \quad ; \quad t_1 + 2\frac{\pi}{\rho} \quad ; \quad .....$$

se observa difieren entre sí en $\frac{\pi}{\rho}$: así pues, el movimiento del cuadro es isócrono y la duración de la semioscilación vale $\frac{\pi}{\rho} = T$

En valor absoluto

$$\alpha_n = \frac{\mathcal{H}.s.n.q}{I.\rho} \operatorname{sen} t_1\rho \times e^{-at_n} \quad ; \quad \alpha_{n-1} = \frac{\mathcal{H}.s.n.q}{I.\rho} e^{-at_{n-1}} . \operatorname{sen} t_1\rho$$

siendo su cociente

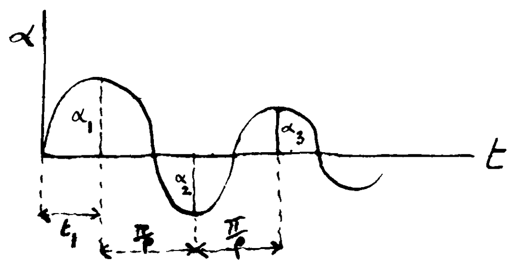
$$e^{-a(t_n - t_{n-1})} = e^{-a.\frac{\pi}{\rho}} = e^{-aT} = e^{-\lambda}$$

de modo, que las desviaciones sucesivas forman una proporción geométrica decreciente cuya razón es $e^{-\lambda}$, recibiendo $\lambda$ el nombre de decremento logarítmico pues

$$\frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} = e^{\lambda}$$

luego $\lambda = \log\alpha_{n-1} - \log\alpha_n$.

La forma de la curva, será pues, en virtud del estudio anterior, la indicada en la figura




De $\lambda = aT$ resulta

$$a = \frac{\lambda}{T} = \frac{f}{2I} + \frac{\mathcal{H}^2 s^2 n^2}{2IR}$$

Además

$$T = \frac{\pi}{\rho} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - a^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{b^2 - \frac{\lambda^2}{T^2}}}$$

luego

$$b = \sqrt{\frac{c}{I}} = \frac{1}{T}\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}$$

Ademas

$$\rho = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{\frac{1}{T^2}(\lambda^2 + \pi^2) - \frac{\lambda^2}{T^2}} = \frac{\pi}{T}$$

$$\operatorname{sen} t_1 \rho = \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2 + a^2}} = \frac{\frac{\pi}{T}}{\sqrt{\frac{\pi^2}{T^2} + \frac{\lambda^2}{T^2}}} = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}}$$

por todo lo cual

$$\alpha_1 = \frac{K.s.n.q}{I} \cdot \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \lambda^2}} \cdot e^{-\frac{\lambda}{\pi} \cdot \operatorname{arc\,tag} \frac{\pi}{\lambda}}$$

Suponiendo que no existan los pares amortiguadores, lo cual ocurre cuando no hay shunt en el circuito, se tendrá que $a = 0$, $\lambda = 0$ por tanto

$$T_0 = \frac{\pi}{b} = \frac{\pi\, T}{\sqrt{\lambda^2 + \pi^2}}$$

$$T = T_0 \cdot \sqrt{\frac{\lambda^2}{\pi^2} + 1}$$

luego

$$\alpha_1 = \frac{K.s.n.q}{I} \cdot \frac{T_0}{\pi} \left[ e^{-\frac{\lambda}{\pi} \operatorname{arc\,tag} \frac{\pi}{\lambda}} = 1 \right]$$

de donde resulta (8) $q = \frac{I}{\mathcal{H}.s.n} \cdot \frac{\pi}{T_0} \cdot \alpha_1$

es decir que la cantidad de electricidad que se descarga en el galvanometro es proporcional á la 1ª desviación en este, cuando no existe shunt en el circuito, ó sea que el amortiguamiento es nulo. Principio importantísimo de que haremos uso.

## Medida de diferencia de potenciales

Cuando se trata de medir diferencia de potenciales entre dos puntos de un circuito recorrido por una corriente, el primer metodo que ocurre es medir la intensidad de la corriente por un galvanometro graduado segun hemos visto para amperimetro, y luego la resistencia del conductor entre los puntos considerados: el producto de estas dos cantidades representa la magnitud buscada. Este metodo no suele emplearse por la gran acumulación de errores á que puede dar lugar

Otro procedimiento está fundado en las relaciones siguientes: de la igualdad (8), llamando K la <u>constante</u> <u>balistica</u> del galvanometro, se saca

$$(9) \quad K = \frac{I}{\mathcal{H}.s.n} \cdot \frac{\pi}{T_0}$$

Mas segun se ha visto en la teoria del galvanometro Deprez - D'Arsonval, la constante permanente del mismo vale

$$K = \frac{c}{\mathcal{H}.s.n}$$

por tanto

$$(10) \quad \frac{K}{K} = \frac{I.\pi}{c.T_0} = \frac{\pi}{T_0.b^2} = \frac{\pi}{T_0.\frac{\pi^2}{T_0^2}} = \frac{T_0}{\pi}$$

en virtud de las relaciones $b = \sqrt{\frac{c}{I}}$ " $T_0 = \frac{\pi}{b}$

Determinando la duración de oscilación $T_0$ sin amortiguamiento, como ya hemos calculado el valor de $K$, se deducirá por (10) la constante $K$

Uniendo los puntos entre los cuales se quiere investigar la diferencia de potencial, con un condensador de capacidad **c** conocida y descargando este rapidamente en un galvanometro balistico de constante $K$ se tendrá

$$q = c.V = K.\alpha,$$

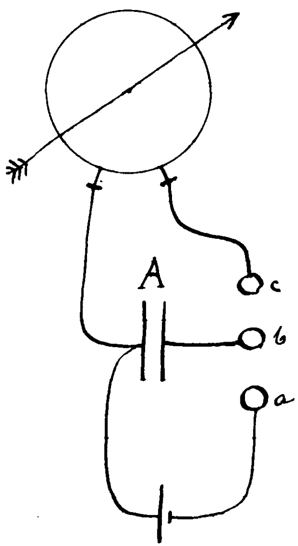
siendo $V$ la diferencia de potencial, que se deduce en funcion de $K$, $\alpha$, y **c**

Tampoco se sigue este procedimiento generalmente, por evitar acumulación de errores al medir $K$: lo que se hace es eliminar esta constante, uniendo con el mismo condensador una pila de fuerza electromotriz conocida $e$ y descargando este en el mismo galvanometro, obteniendose de este modo las relaciones

$$q = c.V = K\alpha_1$$
$$q' = c.e = K.\alpha'_1$$

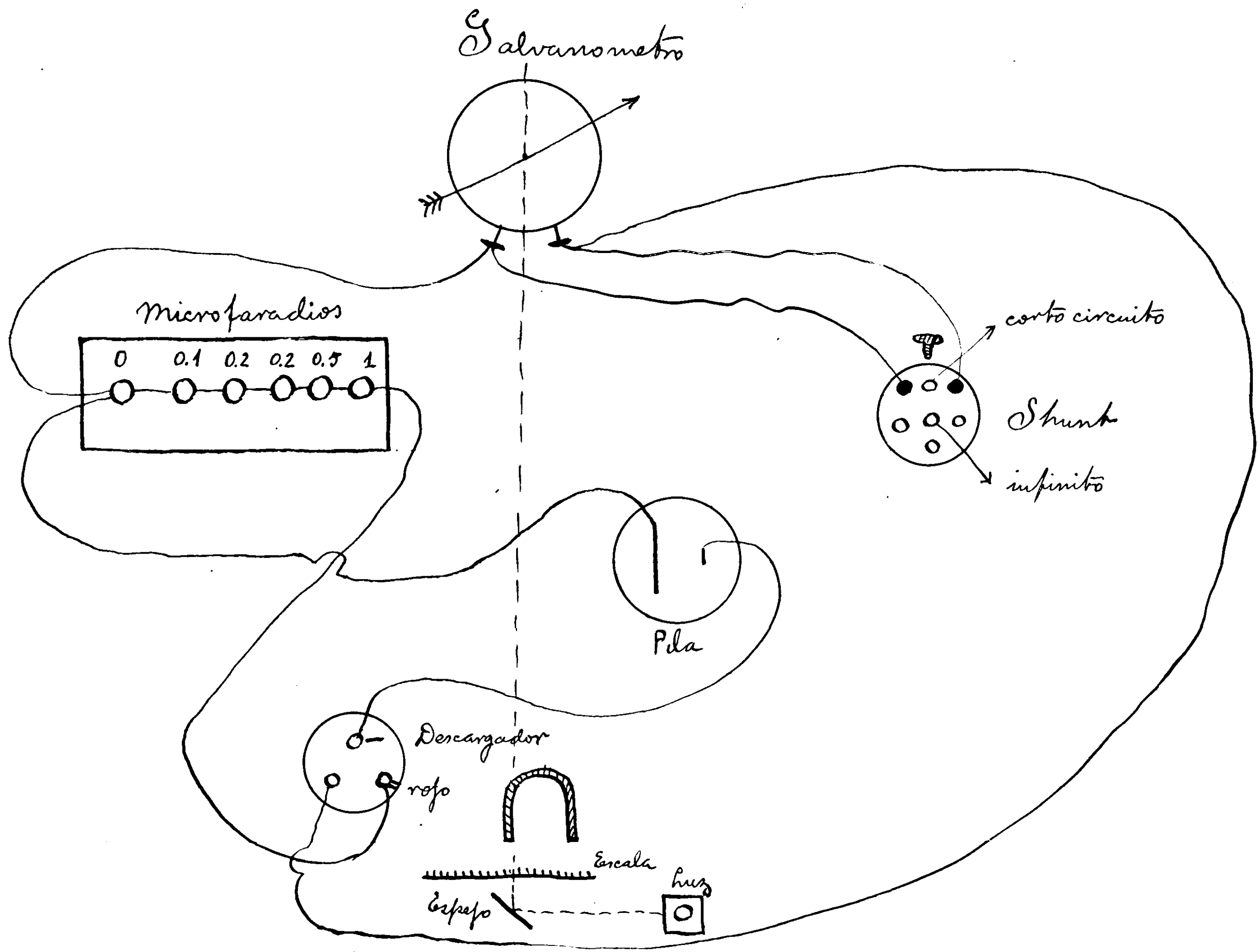
de donde

$$(11) \qquad V = e.\frac{\alpha_1}{\alpha'_1}$$




Las conexiones se hace como indica la figura adjunta, en la cual $a$, $b$, $c$ representan tres tacillas de mercurio en donde se introducen los terminales de los hilos: por medio de un hierro en forma de herradura se establece primero la unión de $a$ con $b$ cargandose de este modo el condensador $A$, y luego la de $b$ con $c$ descargandose este en el galvanometro balistico

La disposición practica es la siguiente


Galvanometro
Microfaradios
0
0.1
0.2
0.2
0.5
1
corto circuito
Shunt
infinito
Pila
Descargador
rojo
Escala
Luz
Espejo

La pila tipo que se emplea generalmente es la de Latimer-Clark cuya fuerza electromotriz es de $1^{vol},434$ en circuito abierto, pero decrece algun tanto en circuito cerrado: por eso se la toma siguiendo este metodo, pues es facil observar, que escepto durante el breve tiempo que se carga el condensador permanece en circuito abierto.

Si en lugar de procurar hallar la diferencia de potencial V entre dos puntos de un circuito, se investigare la fuerza electromotriz $e'$ de una pila, el mismo razonamiento que antes nos llevaria á la igualdad

$$e' = e \cdot \frac{\alpha_1'}{\alpha_1}$$

Se emplea un condensador de papel estañado y parafinado, cuya capacidad se la puede hacer variar entre 0,1 á 2 microfaradios uniendo con un alambre grueso que no introduzca resistencia las bornas correspondientes.

Para la carga y descarga del condensador se emplea tres pequeños tubos con mercurio, uno de ellos rodeado de un hilo rojo para meter siempre en él, un hilo que vaya al condensador, evitandose de este modo equivocaciones pues siempre la herradura en la carga y descarga debe introducirse en el mismo.

Durante la descarga el shunt debe estar en la posición infinito, es decir, que el galvanometro trabaje sin este aditamento, como lo exige la teoria que expusimos. Mas despues de haber hecho la lectura de la primera desviación, con objeto de que el galvanometro se detenga rapidamente y cese sus movimientos periodicos, se pone el shunt en corto circuito, por la razon que ya sabemos.

Para hacer las lecturas comparables de una pila á otra, se necesita que la posición de la escala sea rigurosamente la misma y que la primera desviación se verifique siempre hacia el mismo lado, para lo cual las uniones deben estar hechas en ambas operaciones del modo que se indica en la figura.

Como este metodo se efectua á circuito abierto, se gasta muy poca cantidad de electricidad por lo cual se recomienda principalmente para medir fuerzas electromotrices de pilas muy polarizables

Con la pila Latimert-Clerk se obtuvieron 50 divisiones de la escala para la primera desviación: su fuerza electromotriz 1,434 voltios es un dato.

<u>Fuerza electromotriz de la pila Meidinger</u>. La desviación fué de 38 divisiones, luego

$$e = \frac{38 \times 1,434}{50} = 1^{\text{volt}},089$$

Fuerza electromotriz de un elemento Daniell. La desviación fué de 37 divisiones, luego

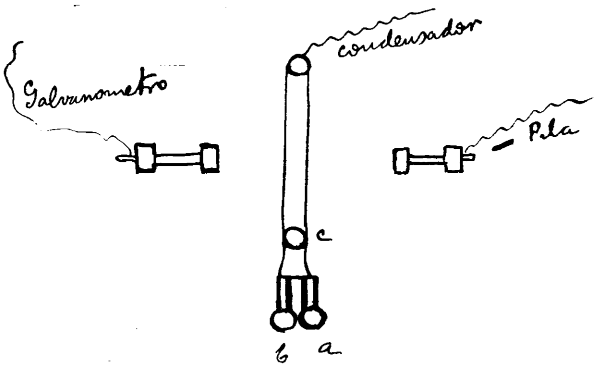
$$e = \frac{37 \times 1,434}{50} = 1^{\text{volt}}.06$$

Fuerza electromotriz de un elemento Poggendorf. La desviación fué de 69 divisiones, por lo cual

$$e = \frac{69 \times 1,434}{50} = 1^{\text{volt}},978$$

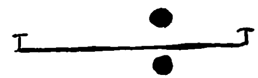
Fuerza electromotriz de un elemento Clark de Carpentier. Se obtuvieron 50 divisiones luego $e = 1,434$ voltios

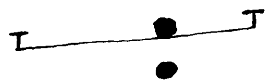
Llave de descarga Sabine. Para provocar la carga y descarga de un condensador se emplea generalmente la llave de Sabine que está compuesta de una lamina empujada hacia arriba por un resorte y movil entre dos traviesas fijas: una de las armaduras del condensador esta unida á la lamina como indica la figura, la traviesa superior con el galvanometro, y la inferior con la pila por su polo negativo para estar conformes con la disposición general

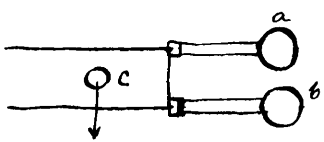



## Posiciones diversas

1)  Para cargar el condensador

2)  Posición de equilibrio

3)  Para descargar el condensador en el galvanometro




→ Empujando este boton se pasa á la posición 2

→ Empujando este boton se pasa á la posición 3

Apretando dos veces este boton se pasa á la posición 1

Los botones _a_ y _b_ forman parte de dos palancas acodadas que giran alrededor del mismo eje, y cuyos brazos verticales llevan dos dientes á diferente altura, de tal modo que se cumplan las condiciones anotadas, merced al resorte que tiende á levantar siempre á la lamina; en esta hay un boton _c_ que la conduce á la posición 2 cuando se le comprime una vez, y á la 1 cuando es dos veces comprimido.

## Constante balistica

En lugar de calcular el valor de K en función de la constante permanente K del galvanometro, es mas exacto hacerlo directamente por medio de una pila de fuerza electromotriz conocida como la de Latimer-Clark. La operación se lleva conforme á la disposición general indicada, habiéndose leido en la escala, con una capacidad de 2 microfaradios en el condensador, 50 divisiones; como en este caso $e = 1,434$ voltios se tendrá

$$K.\alpha_1 = c.e = 2 \times 1,434 = K \times 50$$

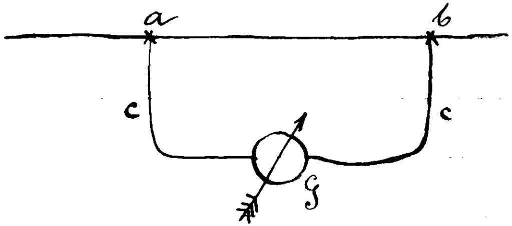
de donde

$$K = 0^{m\mathcal{C}},057$$

estando expresado en microculombios por ser la capacidad microfaradios

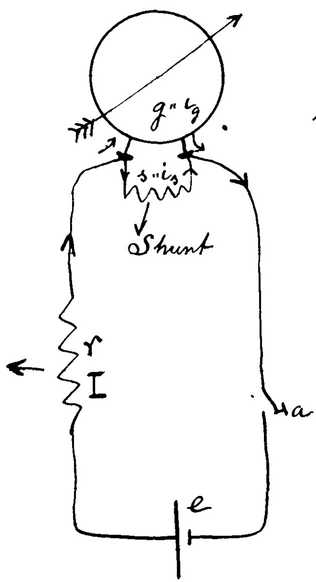
## Galvanometro-voltmetro

Otro procedimiento que puede seguirse cuando se trata de hallar la diferencia de potencial entre a y b es derivar un hilo c de gran resistencia en el cual se coloca un galvanometro G: la corriente que pase por c debe ser muy pequeña para que la




diferencia de potencial permanezca proximamente la misma. Sucede lo que en un deposito de agua cuando del fondo y paralelamente á él, se deriva un tubo de pequeña seccion: la altura ó nivel del agua varia muy poco en el recipiente

---




Gran resistencia

Lo que hemos dicho se aplica á la medida de fuerzas electromotrices de pilas: colocando primeramente una tipo conocida y cerrando la llave <u>a</u> se obtiene una desviación <u>α</u>; luego por la teoria del galvanometro Deprez-D'Arsonval

$$i = (\text{corriente que pasa por el galvanometro}) = \frac{e}{r} = K.\alpha$$

donde <u>r</u> representa la resistencia exterior y del galvanometro, <u>suponiendo que no exista shunt</u>. Colocando otra pila en iguales condiciones

$$i' = \frac{e'}{r} = K.\alpha'$$

luego $$e' = e \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$$

Considerando el shunt $$i_g = K\alpha$$

mas por la ley segunda de Kirchhof

$$\frac{i_g}{i_s} = \frac{s}{g} \quad " \quad \frac{i_g + i_s}{i_g} = \frac{I}{i_g} = \frac{s+g}{s}$$

por tanto

$$I \cdot \frac{s}{s+g} = K\alpha$$

Pero tambien

$$e = rI + s \cdot i_s = I\left[r + \frac{s \cdot g}{s+g}\right]$$

por lo cual

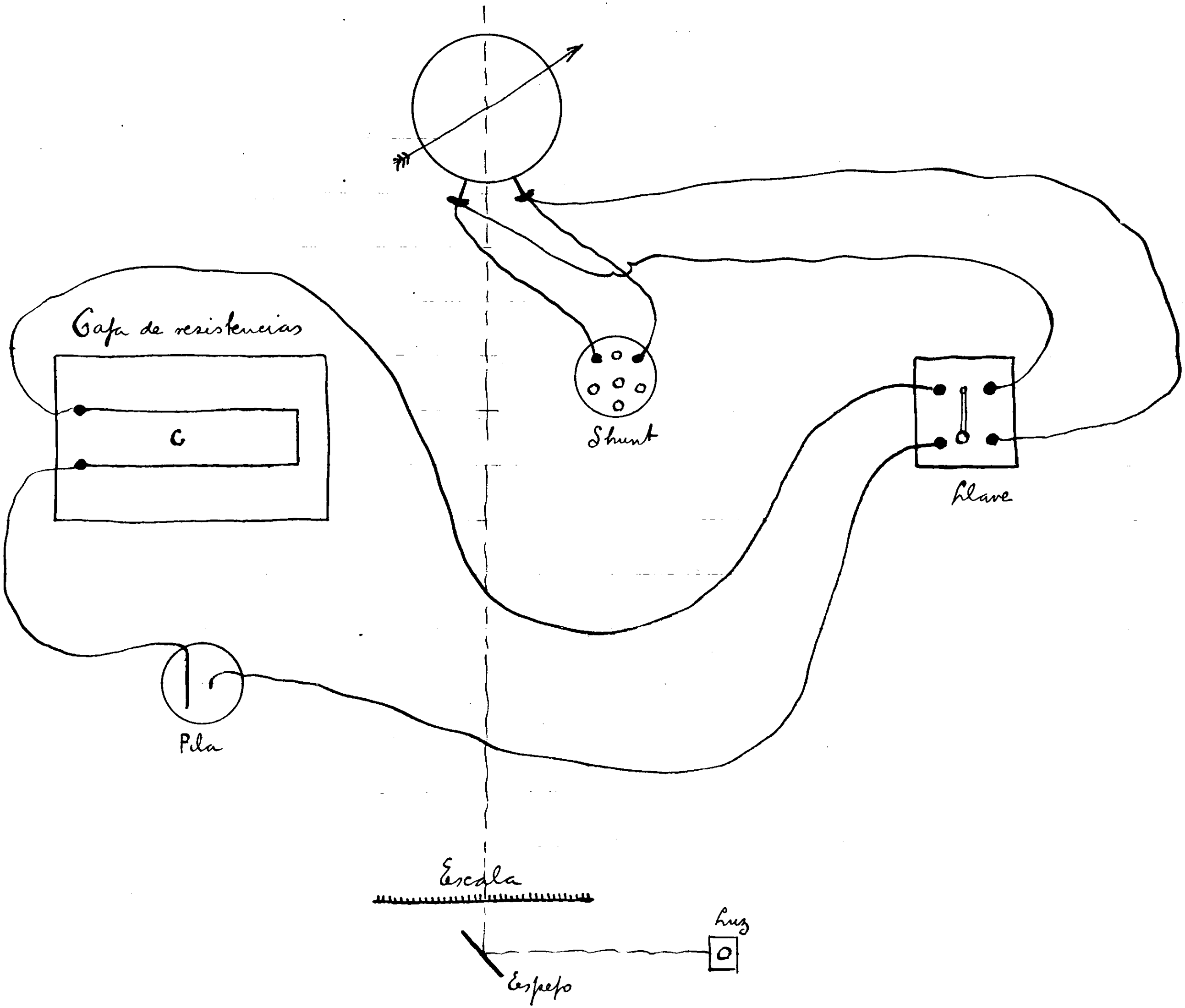
$$\frac{s}{s+g} \times \frac{e}{r + \frac{s \cdot g}{s+g}} = K \cdot \alpha$$

Dejando constantes el shunt y la resistencia, para otra pila de fuerza electromotriz desconocida $e'$ se tendrá

$$\frac{s}{s+g} \times \frac{e'}{r + \frac{s \cdot g}{s+g}} = K \cdot \alpha'$$

luego tambien $$e' = e \cdot \frac{\alpha'}{\alpha}$$

El shunt debe emplearse para amortiguar las oscilaciones y para modificar la sensibilidad del galvanometro-voltmetro. La disposición practica es la siguiente


Caja de resistencias
C
Shunt
Llave
Pila
Escala
Luz
Espejo

La resistencia que suele generalmente usarse es de 2000 á 10000 ohms y una vez fija, para que las desviaciones puedan leerse bien, se emplea la misma para todas las medidas comparativas: otro tanto hay que hacer con el shunt.

Se tomó como pila tipo la de Daniel cuya fuerza electromotriz vimos era de $e = 1^{volt},06$; poniendo 5000 ohms de resistencia y el shunt en la posición de $\frac{1}{99}$ se leyeron 24 divisiones

Fuerza electromotriz de un elemento de acumulador Dinin. En las mismas condiciones se leyeron 45 divisiones; luego

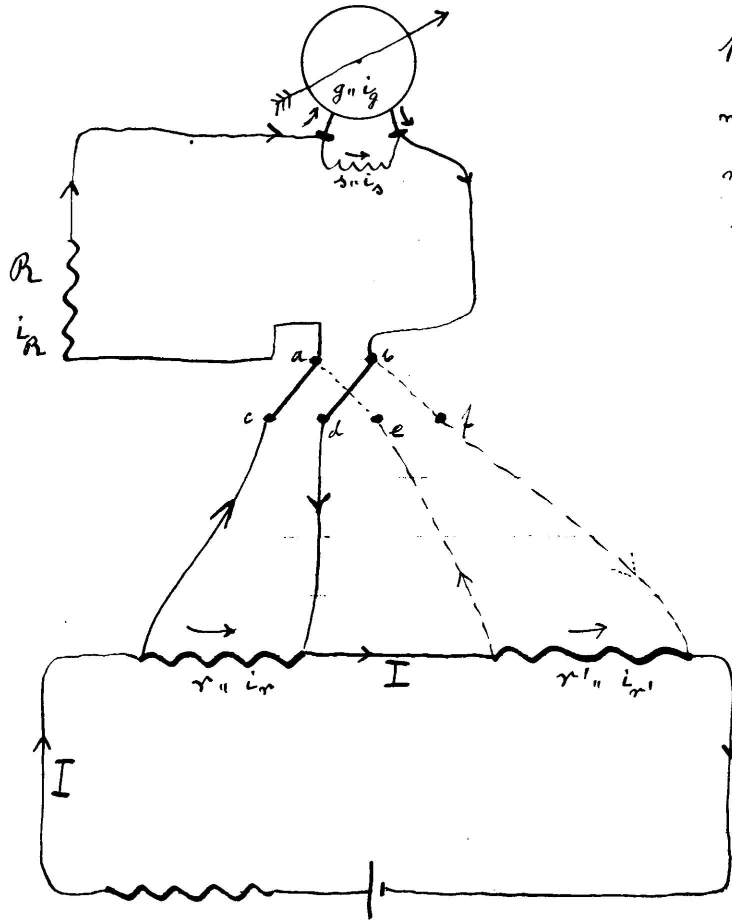
$$e = \frac{1,06 \times 45}{24} = 1^{volt},98$$

Fuerza electromotriz de un elemento Bunsen. Se leyeron 40 divisiones en las mismas condiciones; por lo cual

$$e = \frac{1,06 \times 40}{24} = 1^{volt},76$$

## Medida de resistencias á elevada temperatura.

Para efectuar este fin, hay que disponer las cosas conforme al siguiente esquema




Poniendo a y b en comunicación con c y d respectivamente la corriente seguirá el camino indicado por las flechas gruesas y se tendrá en virtud de las leyes de Kirchhof

$$i_R = i_g + i_s$$

$$i_g \cdot g = i_s \cdot s \quad ; \quad \frac{i_g}{i_s} = \frac{s}{g}$$

luego

$$i_R = i_g\left(1+\frac{g}{s}\right)$$

Pero también

$$i_R \cdot R + i_s \cdot s = i_r \cdot r$$

ó bien

$$i_r \cdot r = i_g\left[R + \frac{Rg}{s} + g\right]$$

Por la teoría del galvanometro

$$i_g = K \cdot \alpha$$

por lo cual

$$i_r \cdot r = K \cdot \alpha \cdot \left[R + \frac{R \cdot g}{s} + g\right]$$

Colocando a y b en unión con e y f como lo indica las líneas de puntos se tendrá por iguales razonamientos

$$i_{r'} \cdot r' = K \cdot \alpha' \left[R + \frac{R \cdot g}{S} + g\right]$$

de donde

$$\frac{i_r \cdot r}{i_{r'} \cdot r'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

pero

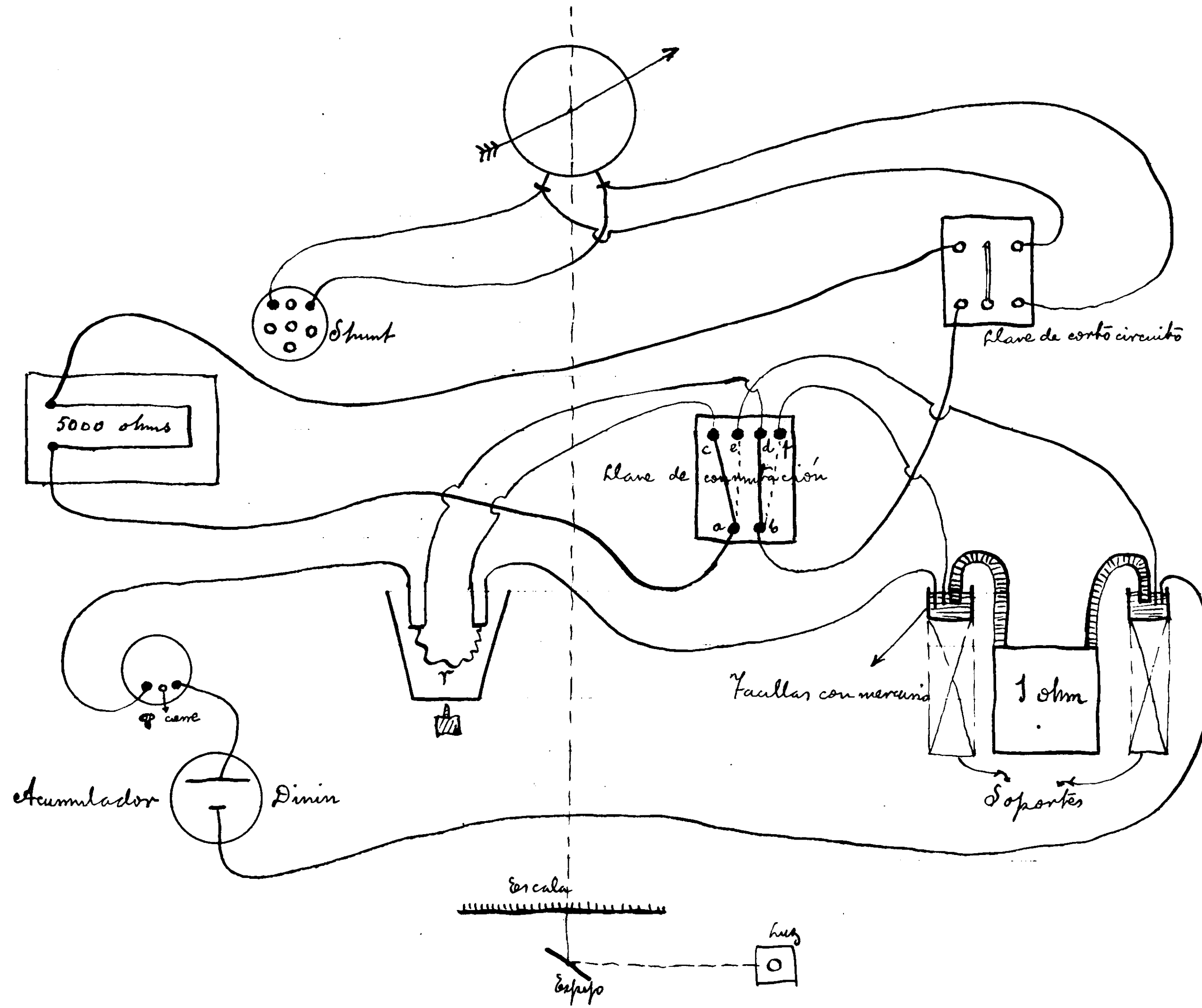
$$I = i_r + i_R = i_R + i_{r'}$$

por tanto

$$\frac{r}{r'} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Haciendo $r' = 1$ ohm $\qquad r = \frac{\alpha}{\alpha'}$

La cuestión se reduce pues, á ir elevando la temperatura de $r$, colocando á esta resistencia en un baño de aceite que se va calentando con una lamparilla de alcohol tomando la precaución de que no toque las paredes de la vasija receptora, si estas son metalicas: introducido un termometro en el baño, se hacen las lecturas de cuando en cuando, anotando al mismo tiempo los valores de $\alpha$ y $\alpha'$, indicados en la escala del galvanometro, lo mas rapidamente posible, los cuales se provocan por medio de la llave de conmutación. Por la teoria expuesta, los valores de $\alpha'$ deben ser siempre los mismos, no ocurriendo esto en la practica, pues las uniones metalicas trasmiten la elevación de temperatura ya á $R$ ya á $r'$ segun sus proximidades relativas á $r$, ocasionando una alteración en la resistencia del segundo circuito considerado



Shunt
Llave de corto circuito
5000 ohms
c e d f
Llave de conmutación
a b
r
Tacillas con mercurio
1 ohm
Soportes
Acumulador
Dinin
Escala
Luz
Espejo

La resistencia R debe ser grande, para poder despreciar como se hizó en la teoria la resistencia de los hilos de conexión de la llave á las $r$ y $r'$: el valor que se le suele dar es de 5000 ohms. El shunt se emplea para amortiguar las oscilaciones y para hacer variar la sensibilidad del galvanometro: en toda la operación debe conservar el mismo valor.

El cuadro de las observaciones anotadas es

| Temperaturas | Desviaciones: Resistencia á medir $r$ | Desviaciones: Resistencia de 1 ohm $r'=1$ | Valores de $r$ |
|---|---|---|---|
| 11° | 332 | 296 | 1,783 |
| 21° | 332 | 295 | 1.822 |
| 24° | 332 | 295 | 1,822 |
| 27° | 332,5 | 295 | 1,833 |
| 40° | 332,5 | 295 | 1,833 |
| 50° | 332,5 | 295 | 1,833 |
| 60° | 333 | 295 | 1,844 |

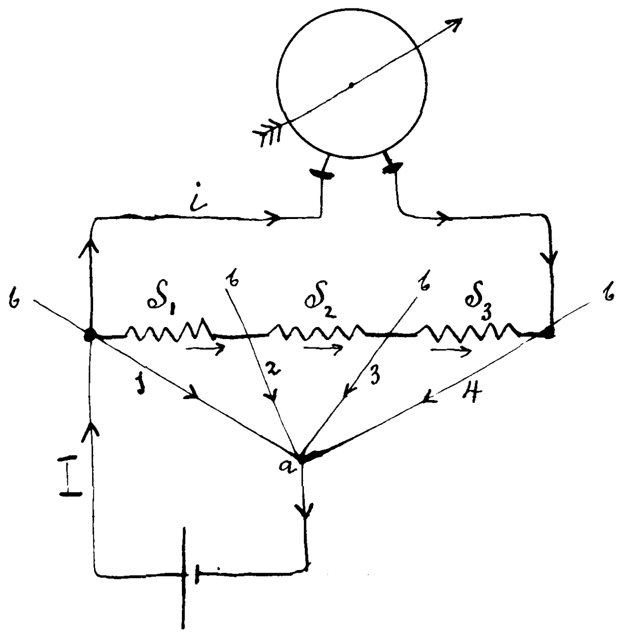
| Temperaturas | Desviaciones | | Valores de $r = \frac{\alpha}{\alpha'}$ |
| --- | --- | --- | --- |
| | Resistencia á medir | Resistencia de Pohm | |
| 70° | 333.5 | 295 | 1.856 |
| 80° | 333.5 | 295 | 1.856 |
| 85° | 333,75 | 295 | 1.861 |
| 90° | 332.5 | 295 | 1.833 |
| 95° | 333.5 | 295 | 1.856 |
| 100° | 332 | 294 | 1.864 |
| 105° | 331,75 | 294 | 1.858 |
| 110° | 331.5 | 294 | 1.852 |
| 115° | 332 | 294 | 1.864 |
| 120° | 332 | 294 | 1.864 |
| 125° | 332 | 294 | 1.864 |
| 130 | 332 | 294 | 1.864 |
| 135° | 332,5 | 294 | 1.875 |
| 140° | 333 | 294 | 1.886 |
| 145° | 333 | 294 | 1.886 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 150 | 332,25 | 294 | 1.869 |
| 160 | 333 | 294 | 1.886 |
| 165 | 333 | 294 | 1.886 |
| 170 | 333 | 294 | 1.886 |
| 175 | 333 | 294 | 1.886 |
| 185 | 333 | 293,75 | 1.897 |
| 190 | 333 | 293,75 | 1.897 |
| 195 | 333,75 | 293,75 | 1.914 |
| 200 | 333,5 | 294 | 1.898 |

# Shunt universal

En un shunt corriente, las diferentes resistencias que se pueden poner en derivación son fracciones de la resistencia del galvanometro para el cual fué construido, no pudiendo por tanto utilizarlo para otro cualquiera; si estas resistencias fuesen conocidas per se el shunt podria emplearse para cualquier galvanometro y seria universal

Para hallar su poder multiplicador realizemos el siguiente esquema: es facil ver que la corriente no circula por el galvanometro cuando la palanca ab toma




la posición 1 que será por tanto la de protección ó reposo.

En la posición 2, aplicando las leyes de Kirchhof al circuito formado por el galvanometro y las resistencias:

$$(I-i)\,s_1 - i\,(g + s_2 + s_3) = 0$$

luego el poder multiplicador $m_1$ valdrá

$$m_1 = \frac{I}{i} = \frac{s_1 + s_2 + s_3 + g}{s_1} = \frac{S + g}{s_1}$$

haciendo

$$S = s_1 + s_2 + s_3$$

Para la posición 3 resulta de un modo analogo

$$m_2 = \frac{I}{i} = \frac{S + g}{s_1 + s_2}$$

y en la 4

$$m_3 = \frac{S + g}{S}$$

Ahora bien

$$\frac{m_1}{m_3} = \frac{S}{s_1} \qquad m_1 = m_3 \times \frac{S}{s_1}$$

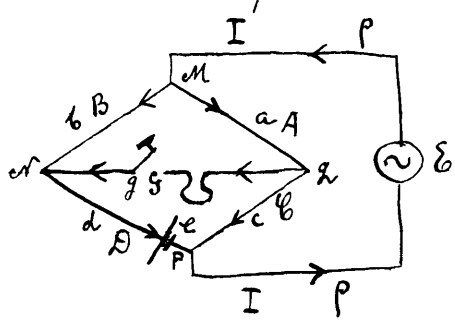
$$\frac{m_2}{m_3} = \frac{S}{s_1 + s_2} \qquad m_2 = m_3 \times \frac{S}{s_1 + s_2}$$

Dado un galvanometro y midiendo su resistencia $g$ se hallará el valor de $m_3$ pues $S$, $s_1$, $s_2$, $s_3$ son conocidos: por las dos relaciones anteriores se deducirán $m_1$ y $m_2$

En el shunt de la Escuela $S = 200$ ohms. " $s_1 = 2$ ohms " $s_2 = 18$ ohms " $s_3 = 180$ ohms.

# Resistência de electrolitos

Metodo de Kohlrausch. El metodo consiste en colocar el electrolito cuya resistencia se busca en el brazo $d$ del puente de Wheatstone siendo el generador de electricidad de carácter alterno y colocando en la diagonal acostumbrada en vez de un galvanometro un telefono que no dará sonido alguno cuando no pase corriente por la misma. Su fundamento es el siguiente; suponiendo en un principio que la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ originada por el generador sea continua y designando por mayusculas las intensidades correspondientes á cada uno de los brazos se tendrá por la segunda ley de Kirchhof en el circuito $MLP\mathcal{E}$




$$(1) \quad \rho I + aA + c\mathcal{C} = \mathcal{E}$$

En el circuito $\mathcal{M}\mathcal{N}\mathcal{Q}$:

$$a\mathcal{A} + g\mathcal{G} - b\mathcal{B} = 0$$

En los nudos $\mathcal{M}$ y $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{A} = \mathcal{G} + \mathcal{C} \quad \text{"} \quad \mathcal{G} = \mathcal{A} - \mathcal{C}$$

$$\mathcal{I} = \mathcal{A} + \mathcal{B} \quad \text{"} \quad \mathcal{B} = \mathcal{I} - \mathcal{A}$$

luego

$$(2) \quad \mathcal{A}(a+g+b) - g\mathcal{C} - b\mathcal{I} = 0$$

En el brazo <u>d</u> se ha colocado la pila ó electrolito de fuerza electromotriz ó de polarización <u>e</u> por lo cual el circuito $P\mathcal{N}\mathcal{Q}$ nos dará

$$g\mathcal{G} + d\mathcal{D} - c\mathcal{C} = -e$$

pero por los nudos $P$ y $\mathcal{Q}$

$$\mathcal{I} = \mathcal{D} + \mathcal{C} \qquad \mathcal{D} = \mathcal{I} - \mathcal{C}$$

$$\mathcal{G} = \mathcal{A} - \mathcal{C}$$

por tanto

$$(3) \quad g\mathcal{A} - (g+d+c)\mathcal{C} + d\mathcal{I} = -e$$

Llamando $\Delta$ al determinante del sistema de ecuaciones (1), (2) y (3)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \rho & a & c \\ -b & a+g+b & -g \\ d & g & -(g+d+c) \end{vmatrix}$$

los valores de $A$ y $C$ serán

$$A = \frac{\Delta_A}{\Delta} \quad " \quad \Delta_A = \begin{vmatrix} \rho & \mathcal{E} & c \\ -b & 0 & -g \\ d & -e & -(g+d+c) \end{vmatrix} = bec - dg\mathcal{E} - \rho eg - b\mathcal{E}(g+d+c)$$

$$C = \frac{\Delta_C}{\Delta} \quad " \quad \Delta_C = \begin{vmatrix} \rho & a & \mathcal{E} \\ -b & a+g+b & 0 \\ d & g & -e \end{vmatrix} = -\rho . e(a+g+b) - bg\mathcal{E} - d\mathcal{E}(a+g+b) - bae$$

luego

$$\mathcal{G} = \frac{\Delta_A - \Delta_C}{\Delta} = \frac{\mathcal{E}(ad-bc) + e\left[\rho(a+b) + ab + ac\right]}{\Delta}$$

Para que este valor de $\mathcal{G}$ se anule es preciso que el numerador sea cero pues $\Delta$ no puede ser infinito y entonces la resistencia $\underline{d}$ del electrolito ó pila que se busca vendrá dado por la igualdad

$$d = \frac{b.c.\mathcal{E}}{a\mathcal{E}} - e . \frac{\rho(a+b)+ab+ac}{a.\mathcal{E}} = \frac{bc}{a} - e . \frac{\rho(a+b)+ab+ac}{a.\mathcal{E}}$$

que se reduce á la sencilla y usual

$$d = \frac{b}{a} . c$$

cuando $e = 0$ , es decir cuando se miden resistencias neutras ; lo que no podia menos de ocurrir.

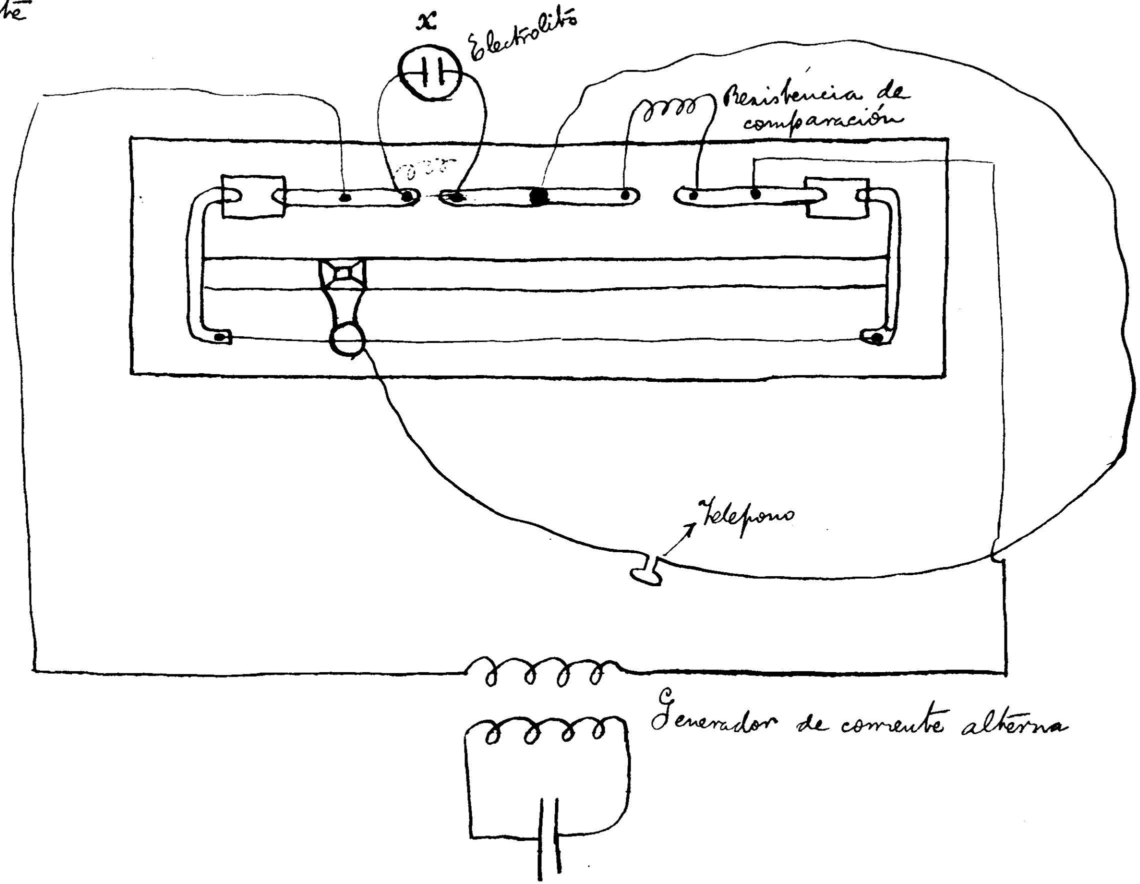
Resulta por tanto que la propiedad fundamental y sencillisima del puente de Wheatstone no es aplicable cuando se trata de medir resistencia de pilas ó de electrolitos y de aqui el artificio de Kohlrausch de : 1.º hacer que la fuerza electromotriz $\mathcal{E}$ sea variable y 2.º de sustituir el galvanometro usual por un indicador telefonico, sobre el cual segun se sabe, no produce sonido alguno cualquiera que sea el valor constante de $e$ la corriente originada por esta fuerza, sino unicamente la corriente variable

$$\frac{\mathcal{E}(ad - bc)}{\Delta}$$

correspondiente á $\mathcal{E}$. El sonido se anulará cuando combinando las resistencias $a$, $b$ y $c$ se tenga $ad = bc$, siguiendo pues el puente, gozando de su privilegio corriente.

De aqui se deduce, la imposibilidad de anular completamente el sonido pues es muy dificil que la fuerza electromotriz ó de polarización $e$ permanezca constante durante el tiempo de la operación, debiendose limitar á buscar el sonido minimo. [Anales de Fisica y Quimica = Septiembre de 1903]

El puente que se emplea es el de hilo con corredor disponiendose las cosas del modo siguiente



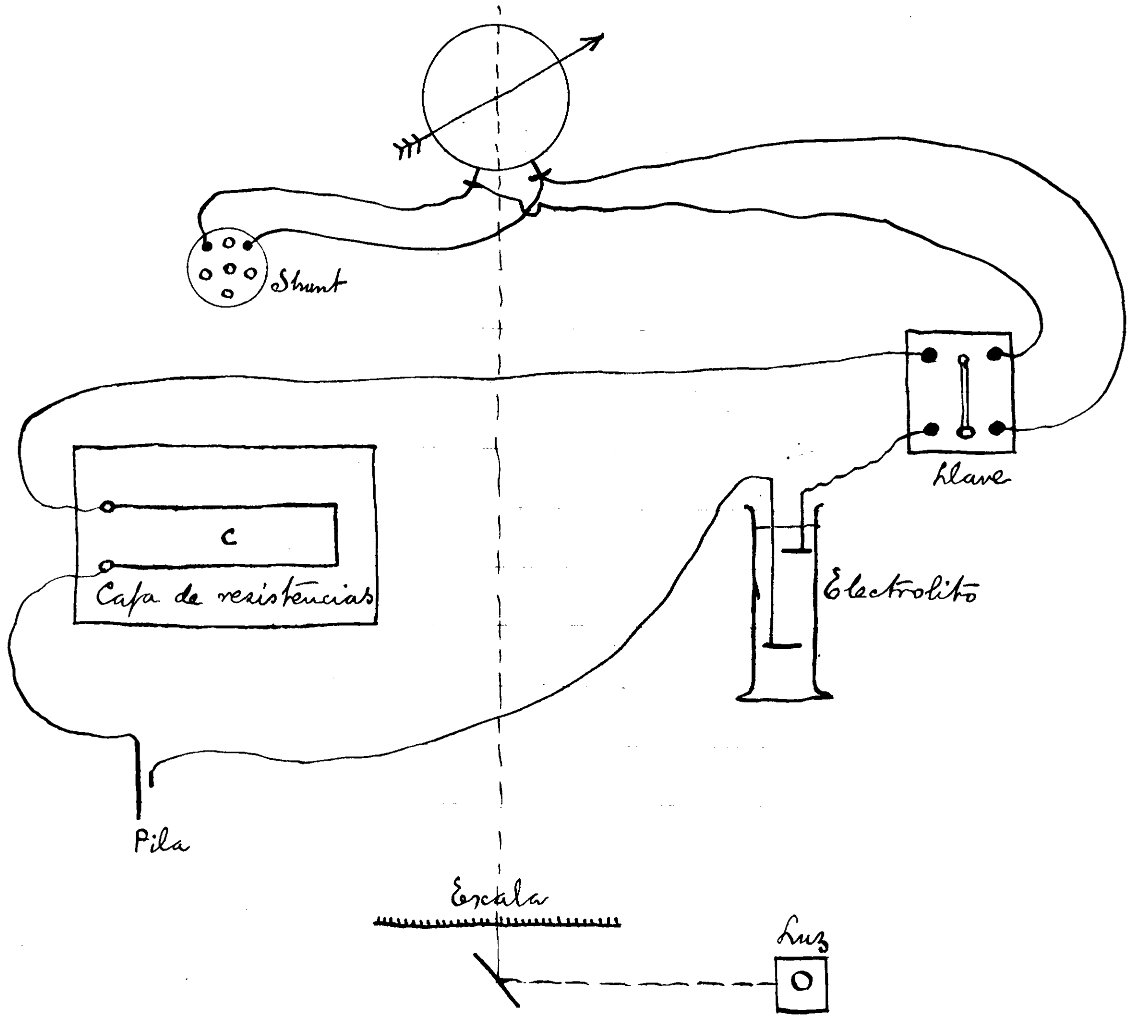
El metodo de Kohlrausch puede evidentemente emplearse para solidos, obteniendose un silencio absoluto pues $e = 0$, suponiendo desde luego que no exista auto-inducción: oprimiendo el corredor y deslizandolo á lo largo de la regla hasta llegar á la posición donde no se perciba sonido alguno, la resistencia buscada será $\frac{b}{a} \cdot c$

Para un alambre de maillechort, poniendo como resistencia de comparación 1 ohm, se encontró

$$r = \frac{38}{62} = 0^{ohms}\,613$$

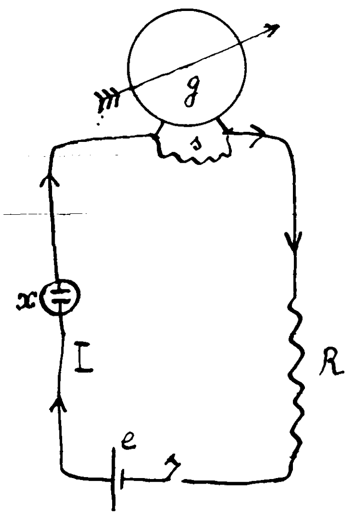
Si el alambre fuese de hierro no se podria llegar al silencio completo, por su autoinducción considerable.

Metodo de sustitución. El electrolito de resistencia desconocida se introduce en un vaso cilindrico de cristal, siendo los electrodos dos rodajas del mism metal que la sal á ser posible y caso contrario de platino: se hace pasar una corriente por un circuito en el cual estan el electrolito, un galvanometro y una resistencia que se gradua para que la desviación en este no sea muy grande. Quitando el electrolito, reuniendo los electrodos, el aumento de resistencia para obtener la misma desviación, es la del electrolito. La disposición práctica es



Leida la desviación en el galvanometro, se quita el electrolito uniendo directamente los alambres que terminaban en los electrodos: aumentando la resistencia se llega á obtener igual lectura que antes siendo este incremento la incognita buscada.

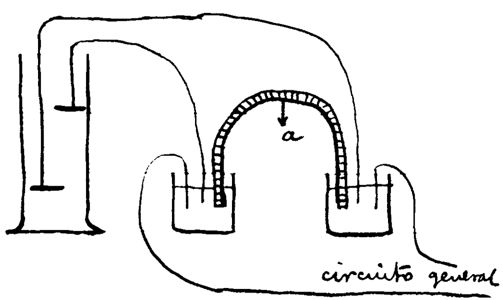
Una observación importante, es que la resistencia R intercalada no debe ser muy grande en relación á la $x$ del electrolito, pues caso contrario la sensibilidad es muy pequeña, es decir á sensibles variaciones de $x$ la desviación es pequeña; pues en la formula




$$I = \frac{e}{R + x + \frac{s.g}{s+g}} = \frac{s+g}{s} . K . \alpha$$

quien en definitiva predomina es R y no $x$ como convendría.

En la segunda parte de la operación, en vez de quitar los alambres de los electrodos y unirlos directamente entre si lo cual podria producir irregularidades, es mas exacto valerse de dos tacillas de mercurio y una barra de hierro <u>a</u> para cerrar el circuito en ambos casos, primero con el electrolito com-



prendido y despues eliminando á este.

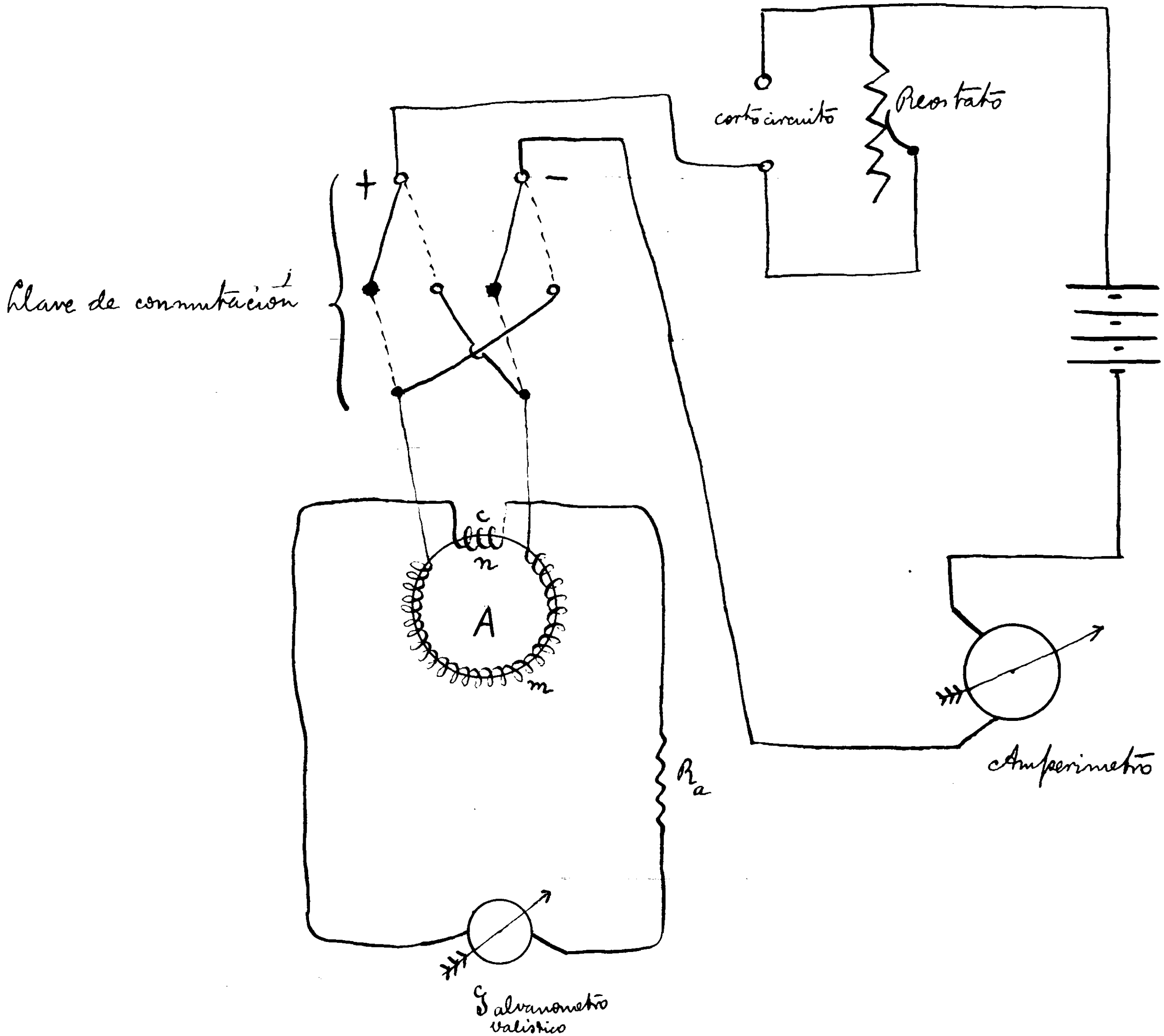
Por no haber tenido en cuenta estas dos notas, los resultados obtenidos por los metodos de Kohlrausch y de sustitución al medir la resistencia de un electrolito de $SO_4Cu$, fueron muy distintos; mas repitiendo las operaciones y con estos cuidados se llegaron á cifras muy conformes. Con 63 ohms intercalados en el metodo de Kohlrausch, los brazos fueron $b = 48,6$ y $a = 51,4$ luego

$$r = \frac{48.6}{51.4} \times 63 = 59^{\text{ohms}},56$$

Aplicando el metodo de sustitución se halló tambien 59 ohms.

# Curva de Hysteresis

**Metodo de Ewing.** El procedimiento mas exacto para trazar la curva de hysteresis ó encontrar la permeabilidad de una sustancia ferromagnetica, es formar con esta un toro sobre el cual se arrolla, tan regularmente como sea posible un hilo de cobre formando espiras aisladas: la diferencia entre los ra-



corto circuito
Reostato
+
-
Llave de conmutación
c
n
A
m
$R_a$
Amperimetro
Galvanometro
valistico

dios exterior é interior debe ser pequeña comparada con el radio medio, á fin de que la separación entre espiras sea sensiblemente la misma dentro y fuera, y el campo producido por la corriente en el interior del toro sea aproximadamente uniforme

Como la construcción de un toro es difícil, del hierro cuya permeabilidad se busca, se cortan coronas circulares que se superponen, estando aisladas unas planchas de otras por una capa de oxido de hierro producida al introducirlas en un baño de vapor á presión. La finalidad de este aislamiento es evitar en lo posible la formación de corrientes parasitas de Foucault, que se traducen por una elevación en la temperatura de la masa de hierro.

Segun indica la figura, ademas del carrete inductor m á que hemos aludido existe otro más pequeño c que se pone en comunicación con un galvanometro balistico, permitiendo segun la teoría de este medir las cantidades de electricidad inducida: como la constante balistica, que ya encontramos, viene dada en microculombios, se tendrá

$$q_1 = K \times 10^{-7} \times \alpha \ (cgs)$$

y en virtud de una ley general de inducción

$$q_1 = \frac{\Phi_n}{r}$$

siendo $\Phi_n$ el flujo que entra por las n espiras que constituyen el carrete c y representando $r$ la resistencia de los hilos y del carrete $c$, mas la adicional $R_a$ sumada á la del galvanometro balistico. El flujo que pasa por una espira será

$$\Phi_1 = \frac{\Phi_n}{n} = \frac{r}{n} \times K \times 10^{-7} \times \alpha$$

de donde la inducción magnetica buscada

$$(1) \quad \mathcal{B} = \frac{\Phi_1}{s} = \frac{r}{n.s} \times K \times 10^{-7} \times \alpha$$

siendo $s$ la sección de una espira ó del hierro del nucleo.

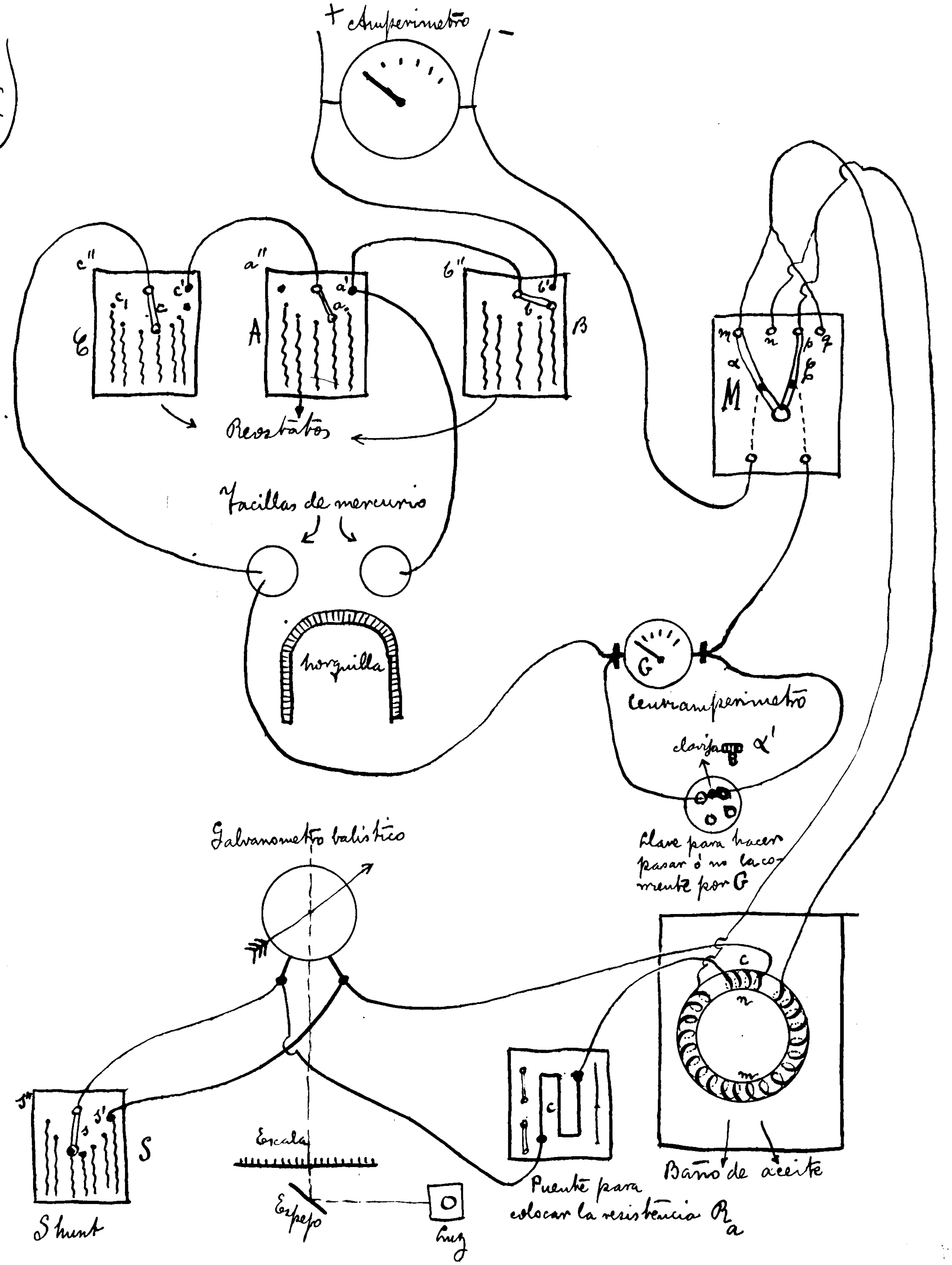
La intensidad de la fuerza magnetizante es, segun se sabe

$$(2) \quad \mathcal{F} = 4 \pi\, m\, i^A \times 10^{-1} \; (cgs)$$

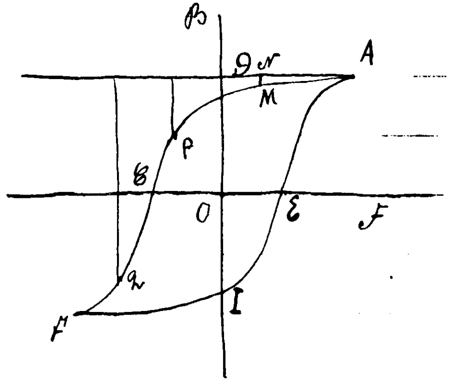
indicando $m$ el numero de espiras del carrete inductor é $i^A$ la intensidad en amperios de la corriente que por él circula y que proviene de los acumuladores.

Para trazar la curva de hysteresis no tendremos mas que dar á $i$ diferentes valores positivos y negativos valiendonos de la llave de conmutación y del reostato que en la figura se indican y midiendolos por un amperimetro: anotando las desviaciones $\alpha$ en el galvanometro balistico por las formulas (1) y (2) se calcularan las ordenadas y abcisas de la curva.

La disposición practica que se adopta está representada por la figura siguiente


+ Amperimetro -
Reostatos
Tacillas de mercurio
horquilla
M
G
Centiamperimetro
clavija α'
Llave para hacer pasar ó no la corriente por G
Galvanometro balistico
Escala
Espejo
Luz
S
Shunt
Puente para colocar la resistencia $R_a$
Baño de aceite

En el primitivo metodo de Rowland se daba á la corriente de el carrete inductor intensidades crecientes, siendo la modificación de Ewing el volver despues de cada observación al punto inicial A, proximo á la saturación despues de haber hecho recorrer á la barra un ciclo completo de imantación presentando este proceder la ventaja, de principiar siempre en las mismas condiciones magneticas.




Las dos tacillas, á las que van á concluir dos hilos que vienen de los reostatos, pueden ponerse en unión electrica por medio de una horquilla de hierro, evitando de este modo que la corriente pase por las resistencias intercaladas A y C: al levantarla bruscamente, se introduce un aumento de resistencia en el circuito, lo que produce una variación en el flujo inductor que se traduce en una corriente de inducción á modo de descarga que atraviesa el galvanometro balistico. Anotadas esta desviación y la intensidad de la corriente por el amperimetro si esta varia entre 1 y 50 A, ó por el centiamperimetro si está comprendida entre 0 y 1 A, se tendran los elementos buscados.

Como la lectura en el galvanometro, no se refiere mas que á la primera desviación, para evitar que este siga oscilando se ha colocado el shunt S, cuya palanca s debe ocupar la posición s'' correspondiente á una resistencia infinita durante la descarga, tomando luego la s' (corto circuito) para conseguir tal resultado. Las desviaciones no fueron muy considerables merced á una resistencia $R_a = 6000$ ohms situada en la caja indicada en la figura.

La palanca b del reostato B debe estar, cuando no se trabaja, en b'' para cortar de este modo la corriente de excitación producida por 6 acumuladores Tudor y de 11,75 amperios por intensidad. Para poder leer con el centiamperimetro, se necesita cerrar el circuito donde se halla este, sacando la clavija α' de su orificio. El toro con sus dos carretes, inductor m é inducido c se introducen en un baño de aceite con objeto de impedir que la temperatura se eleve demasiado, lo cual produciría variaciones sensibles en la resistencia del hilo. La llave de conmutación M es la indicada para invertir el sentido de la corriente.

Para educar la barra se hacen pasar los brazos α y β de la llave M sobre los botones m, p á n, q y recíprocamente varias veces. Con objeto de recorrer un ciclo se hacen las manipulaciones siguientes: quitada la horquilla de las tazas de Hg, situada la palanca s contra s' á fin de evitar desviaciones en el galvanometro y colocadas las palancas a, b, c contra a', b', c' estaremos en el punto A de la curva de hysteresis suponiendo por ejemplo que las ramas α y β toquen á los botones m y p.

Para llegar hasta el punto D de la curva, será preciso llevar el brazo c del reostato C, hasta $c_1$ y despues a en a'' quedando entónces cortada la corriente: haciendo que α y ℰ pisen á n y q será ésta invertida, siendo necesario para ir hasta F (curva) el situar c contra c' y a en a'. Volviendo nuevamente á llevar c en c, y a en a'' estaremos en el punto I, por lo que invertiremos la corriente colocando α y ℰ contra m y p, despues de lo cual pondremos c en c' y a en a' para regresar al punto inicial A. Ejecutando una sola vez el conjunto éste de operaciones, habremos conseguido el resultado propuesto.

En estas condiciones de a, b, c contra a', b', c', α y ℰ sobre m y p, se pone la horquilla uniendo á las dos tazas con mercurio; quitando el shunt (s en s'') y haciendo que los reostatos A y ℰ tengan una cierta resistencia se levanta rapidamente la horquilla anotándose las lecturas del galvanometro y amperimetro que darán la posición del punto M en la curva de hysteresis. Por las manipulaciones ya descriptas volvemos al origen A despues de recorrer un ciclo completo, para repetir la operación en tanto nos sea posible variar las resistencias de A y ℰ hasta llegar hacer nula la corriente de excitación, habiendo de este modo trazado el tramo AD de la curva. A fin de construir el DCF, será preciso unir las tacillas de mercurio cuando esten a, b, c contra a', b', c', α y ℰ sobre m y p, variar las resistencias de A y ℰ, levantando y moviendo simultaneamente la horquilla y la llave de conmutación, obteniendose un punto tal como P; regresando al origen A despues de recorrer el ciclo, se repite varias veces esta operación hasta llegar combinando convenientemente las resistencias al punto inferior F'

Trazada la rama A M P E 2 F' tomando por origen de coordenadas el punto A se determinará facilmente los dos ejes OF' y OB, y por simetria con relación á O la porción F' I E A.

Las desviaciones anotadas, en un ensayo efectuado con hierro de buena cualidad fueron:_

| Amperimetro | Galvanometro balistico |
|---|---|
| 3.25 | 10 |
| 1.40 | 16 |
| 0.81 | 22 |
| 0.59 | 25 |
| 0.43 | 28 |
| 0.34 | 30 |
| 0.29 | 31 |

| Amperimetro | Galvanometro |
| --- | --- |
| 0.27 | 31 |
| 0.21 | 32 |
| 0.20 | 32 |
| 0.16 | 33 |
| 0.00 | 37 |
| 0.16 | 114 |
| 0.20 | 115 |
| 0.22 | 116 |
| 0.27 | 118 |
| 0.29 | 118 |
| 0.34 | 119 |
| 0.42 | 121 |
| 0.58 | 123 |
| 0.81 | 126 |
| 1.40 | 132 |
| 3.25 | 141 |

11.75 150

La constante balistica vale segun encontramos

$$K = 0.057 \ m\mathcal{C}$$

y la resistencia del galvanometro

$$r_g = 203,3^{\text{ohms}}$$

Los hilos que lo unen al carrete $\underline{c}$ presentan una resistencia de $0^{\text{ohms}},17 = r_h$ por lo cual $r = R_a + r_g + r_h = 6000 + 203.3 + 0.17 = 6203,47^{\text{ohms}}$

Ademas

$$n = 100 \text{ espiras}$$

$$s = 1.80^{\text{cm}^2}$$

transformandose la formula (1) en

$$\mathcal{B} = \frac{6203.47 \times 10^9}{100 \times 1.80} \times 0.057 \times 10^{-7} \times \alpha \quad (\text{cgs})$$

ó bien

$$(3) \quad \mathcal{B} = 196,443 \times \alpha$$

Como

$$m = 141 \text{ espiras}$$

$$D = \text{diametro medio del toro} = 11^{\text{cm}}$$

se tendrá para valor de la intensidad de la fuerza magnetizante

$$\mathcal{H} = 4\pi\, m_1\, i \times 10^{-1} = 4\pi \times \frac{m}{l} \times i \times 10^{-1} = 4\pi \frac{m}{\pi D} \cdot \times i \times 10^{-1}$$

$$\mathcal{H} = 4 \cdot \frac{m}{D} \times i \times 10^{-1}$$

$$(4) \quad \mathcal{H} = 4 \times \frac{141}{11} \times i \times 10^{-1} = 5,127 \times i$$

Sustituyendo en (3) y (4) los valores de $\underline{\alpha}$ é $\underline{i}$ ya anotados, se obtendrán los resultados siguientes

| Valores de $\mathcal{H}$ | Valores de $B$ |
|---|---|
| 16,663 | 1964.43 |
| 7.178 | 3143,04 |
| 4.153 | 4321.68 |
| 3.025 | 4911,00 |
| 2.205 | 5500.32 |
| 1.743 | 5893,20 |
| 1.487 | 6089.64 |
| 1.385 | 6089.64 |
| 1.077 | 6286,08 |
| 1.025 | 6286.08 |
| 0.820 | 6482,52 |
| 0.000 | 7268,28 |
| − 0.820 | 22394,16 |
| − 1.025 | 22590.60 |

| | |
|---|---|
| 1.128 | 22787.04 |
| 1.384 | 23179.92 |
| 1.487 | 23179,92 |
| 1.743 | 23376,36 |
| 2,153 | 23769,24 |
| 2,974 | 24162,12 |
| 4.153 | 24751,44 |
| 7.178 | 25930,08 |
| 16.663 | 27698.46 |
| 60.242 | 29466,00 |

El valor de la pearmilildad estará dado en cada instante por la relación de B á H: efectuando operaciones se encuentra

| Para $H>0$ | Para $H<0$ |
|---|---|
| 118.16 | 27309,75 |
| 437.87 | 22039,61 |
| 1040,62 | 20201,27 |

| | |
|---|---|
| 1623,47 | 16748,49 |
| 2494,47 | 15588,37 |
| 3381,06 | 13411,56 |
| 4095,25 | 11040,05 |
| 4396,85 | 8124,43 |
| 5836,59 | 5959,89 |
| 6132,69 | 3612,42 |
| 7905,51 | 489,13 |

Trazando la curva con estos valores, no resultó con forma exacta, pues las ramas simétricas se cruzaban. Efectuando otra serie de operaciones se hallaron los valores

| Amperímetro | Galvanómetro balístico |
|---|---|
| 11.5 | 0 |
| 2.5 | 15 |
| 1.25 | 26 |
| 0.74 | 30 |
| 0.54 | 34 |

| Amperimetro | Galvanometro |
|---|---|
| 0.48 | 35 |
| 0.43 | 36 |
| 0.35 | 37 |
| 0.31 | 38 |
| 0.26 | 40 |
| 0.215 | 41 |
| 0.00 | 46 |
| −0.22 | 135 |
| −0.27 | 139 |
| −0.34 | 143 |
| −0.37 | 144 |
| −0.45 | 145 |
| −0.66 | 154 |
| −0.97 | 163 |
| −2.5 | 171 |
| −11.5 | 188 |

Por las formulas (3) y (4) se encuentra los resultados siguientes:

| Valores de H | Valores de B |
|---|---|
| 12,8175 | 2946,645 |
| 6.4088 | 5107,518 |
| 3.7938 | 5893,29 |
| 2,7686 | 6679,062 |
| 2,4609 | 6875,505 |
| 2,2046 | 7071,948 |
| 1.7945 | 7268,391 |
| 1.5894 | 7464,834 |
| 1.3330 | 7857,72 |
| 1.0254 | 8054,163 |
| 0.0000 | 9232,821 |
| −1.1279 | 26519,805 |
| −1.3843 | 27305,577 |
| −1.7432 | 28086,949 |

| | |
|---|---|
| − 1,8970 | 28282,952 |
| − 2,3072 | 28479,835 |
| − 3,3838 | 30252,222 |
| − 4,9732 | 32020,209 |
| − 12,8175 | 33591,753 |
| − 58,9605 | 18465,600 |

Medida el area de la curva de magnetismo obtenida con estos numeros, resultó ser $30^{cm^2},8$. Como la escala admitida para $\underline{\mathcal{H}}$ es 1 Gauss = $0^{cm}.5$ y la escala de $\underline{B}$ es 1000 (cgs) = 1cm, el valor de la pérdida $\underline{x}$ correspondiente al area, estará dada por la relación

$$0^{cm}.5 \times 1^{cm} : 1 \times 1000 \text{ ergs} :: 30^{cm^2}.8 : x$$

$$x = \frac{30\,800}{0.5} = 61600 \text{ ergs}$$

La perdida por hysteresis vale, por centimetro cubico y ciclo

$$\frac{61600}{4\pi} \text{ ergs}$$

Siendo la inducción máxima

$$B = 18466 \text{ (cgs)}$$

el coeficiente de Steinmetz vendrá dado por la igualdad

$$\frac{61600}{4\pi} = \eta \times (18466)^{1.6}$$

$$\log \eta = \log 61600 - \log 4\pi - 1.6 \log 18466$$

$$\log 61600 = 4,7895\,8071$$

$$\log 12,56 = 1,0989896$$

$$3,6905911$$

$$1.6 \times \log 18466 = 6,8261965$$

$$\bar{4},8643946$$

de donde

$$\eta = 0,0007318$$

Las chapas de hierro empleadas tenian 15 cm de diametro exterior y 11 cm para el interior siendo su espesor de $0^{cm},046$. Su volumen será

$$\frac{\pi}{4}\left(\overline{15}^2 - \overline{11}^2\right) \times 0.046$$

y el total para las 18 usadas

$$3.14 \times 26 \times 0.046 \times 18 = 67^{cm^3},60$$

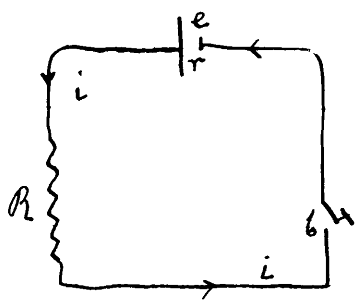
Resulta pues, para la pérdida total, producida por la hysteresis

$$\frac{61600}{4\pi} \times 67,60 = 331541^{ergs},50$$

# Resistencia de pilas

<u>Metodo del voltmetro</u>. Entre los varios procedimientos que se siguen para hallar la resistencia de pilas hidroelectricas, uno de los mas sencillos es el del voltmetro. Presenta realmente tres variantes:

1ª. Supongamos la pila objeto de medida, intercalada en un circuito de resistencia $R$ produciendo una corriente de intensidad $\underline{i}$: llamando $\underline{r}$ la resistencia buscada, se tendrá




$$(1)\quad e = Ri + ri$$

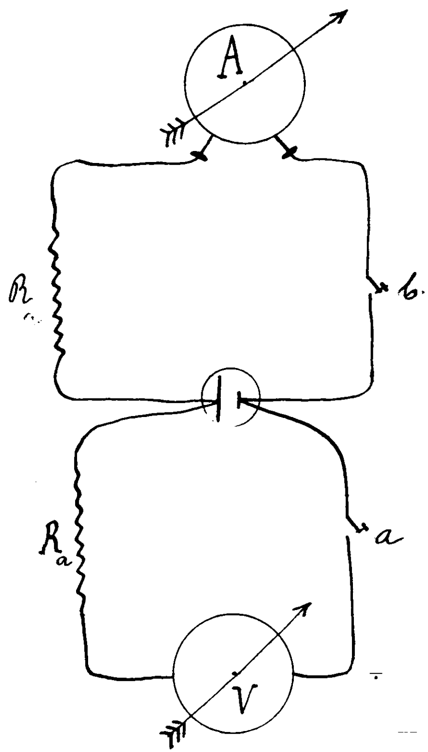
luego la diferencia de potencial $\underline{v}$ en los bornes de la pila será

$$(2)\quad v = e - ri = Ri$$

De la igualdad (1)

$$(a)\quad r = \frac{e - Ri}{i}$$

que nos dice, tenemos que medir $\underline{e}$, $\underline{R}$, $\underline{i}$ para calcular $\underline{r}$: la resistencia $\underline{R}$ puede ser de una caja. La fuerza electromotriz $\underline{e}$ se encontrará por un voltmetro; la intensidad $\underline{i}$ por un amperimetro, ó por un voltmetro situado entre dos puntos del circuito con resistencia conocida. La disposición que adoptaremos será la siguiente, cuando se use amperimetro



(Fig a)

La intensidad $\underline{i}$ será medida en el amperímetro A por la desviación $\alpha'$

$$i = K \cdot \alpha'$$

para lo cual se abrirá la llave $\underline{a}$ y cerrará la $\underline{b}$. Suponiendo que $R_a$ sea bastante grande para que V funcione como amperímetro, tendremos si cerramos $\underline{b}$ y abrimos $\underline{a}$

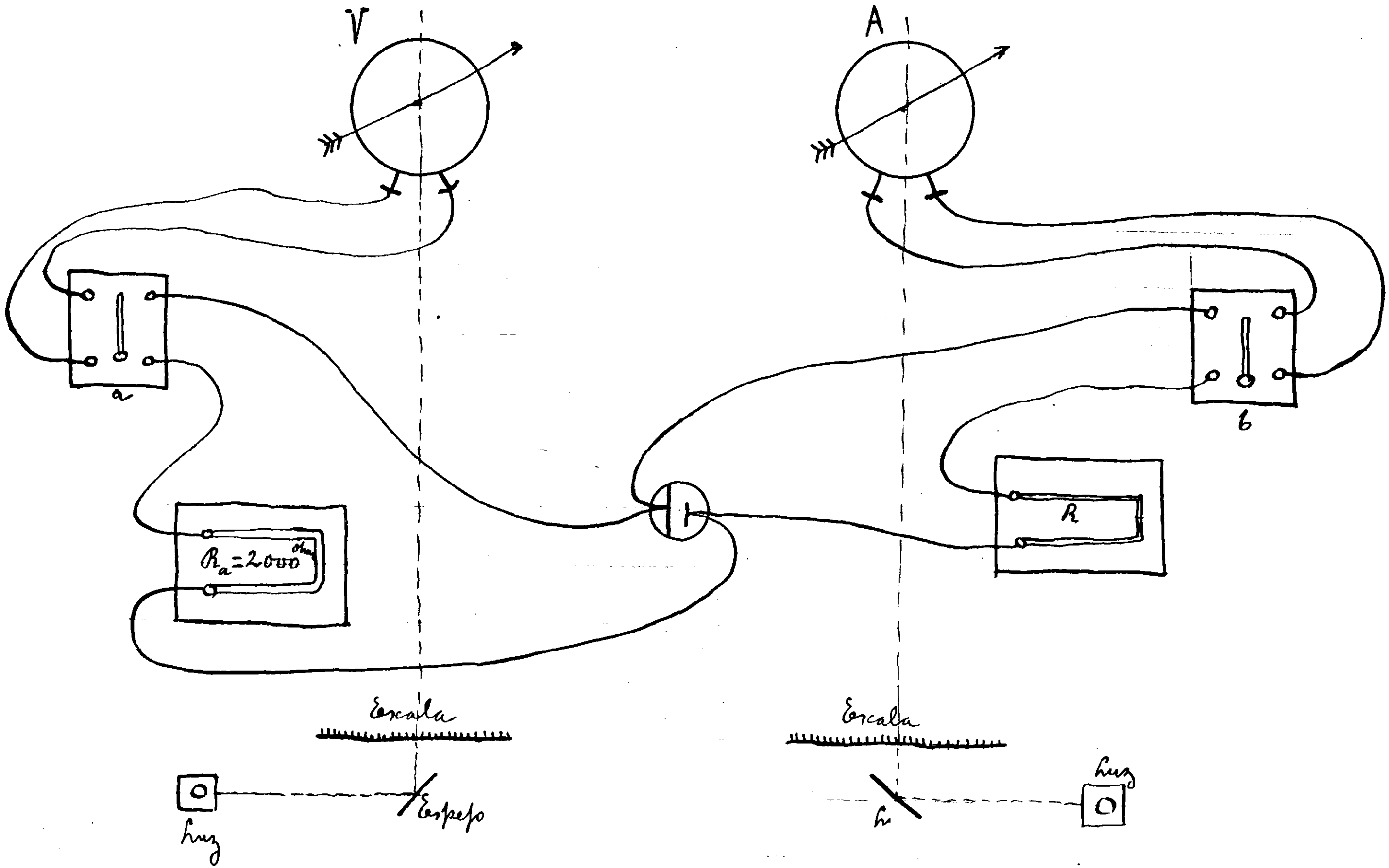
$$e = K'. \alpha$$

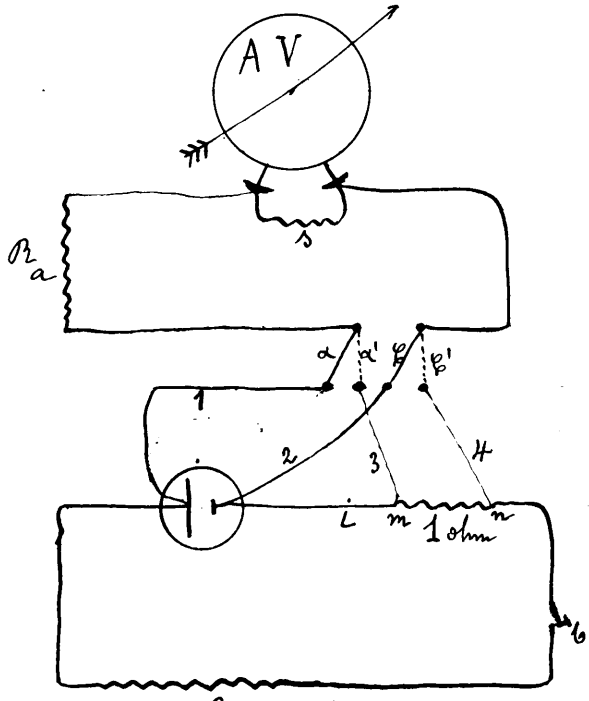
pues en general A y V tendrán constantes diferentes. Entonces

$$r = \frac{K'.\alpha - R.K.\alpha'}{K.\alpha'}$$

La resistencia R debe graduarse de tal modo, que la desviación en A no se salga de los límites de la escala: lo mas cómodo es usar una caja Carpentier.

La disposición práctica está indicada á continuación: presenta el inconveniente de exigir dos galvanometros y dos escalas, lo cual ocupa demasiado sitio, por lo que no se sigue generalmente.


V
A
a
b
$R_a = 2000^{ohms}$
R
Escala
Escala
Luz
Luz
Espejo
E



(Fig 6)

La disposición empleada es la adjunta cuando se usa el voltmetro para medir la intensidad $\underline{i}$: á este efecto, entre dos puntos $\underline{m}$ y $\underline{n}$ del circuito se intercala una resistencia de 1 ohm por lo que

$$i = \frac{V}{1^{ohm}}$$

siendo V la diferencia de potencial entre $\underline{m}$ y $\underline{n}$
Para encontrarla, se cierra la llave $\underline{b}$, haciendo pasar la corriente por 3, 4, α', β' al galvanometro-voltmetro que nos dará

$$V = K.\alpha'$$

luego
$$i = \frac{K.\alpha'}{1 ohm}$$

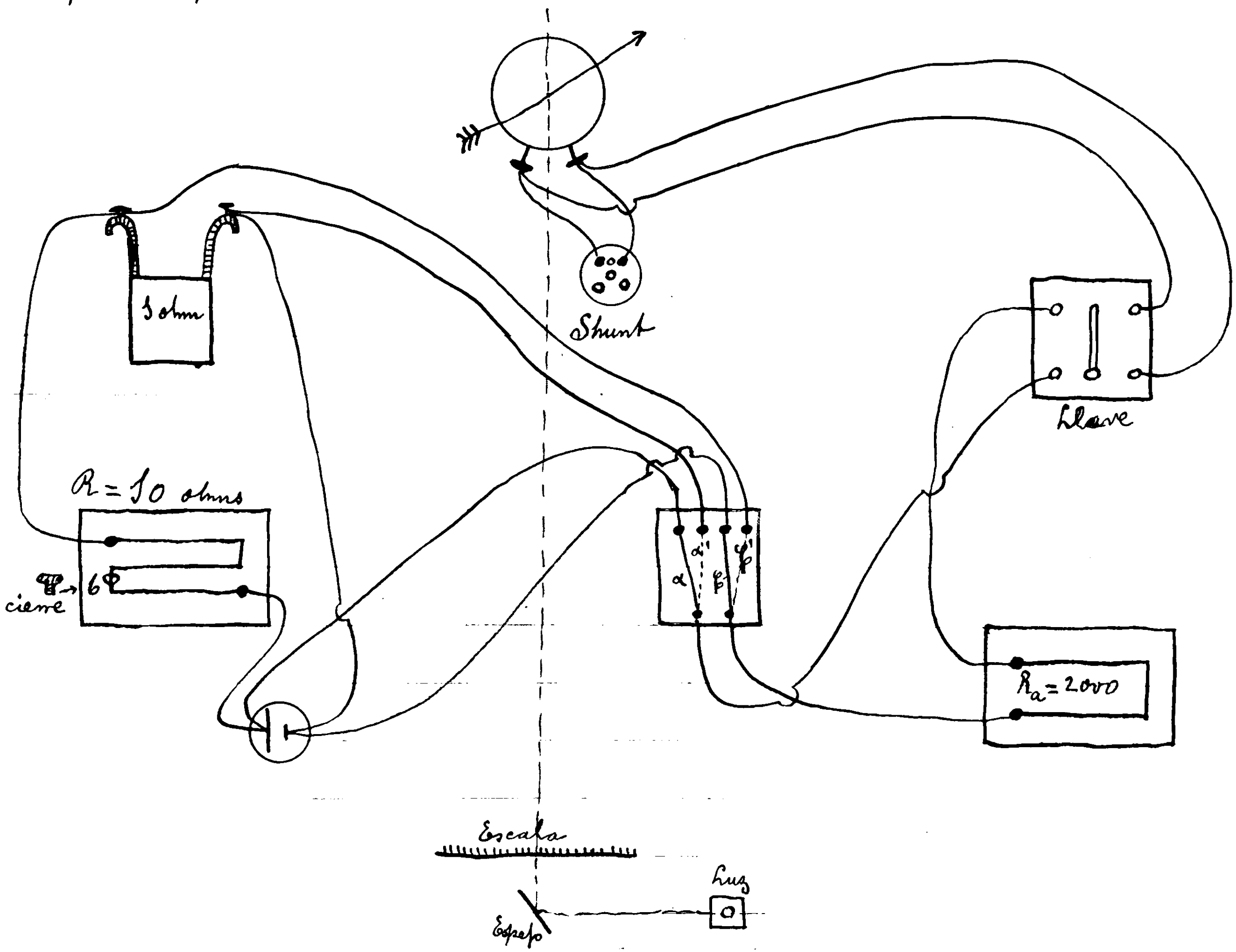
Abriendo $\underline{b}$, y poniendo las ramas de la llave de conmutación en $\underline{\alpha}$ y $\underline{\beta}$ la corriente pasará por 1 y 2 al voltmetro por lo que

$$e = K.\alpha$$

luego la resistencia de la pila valdrá segun (a)

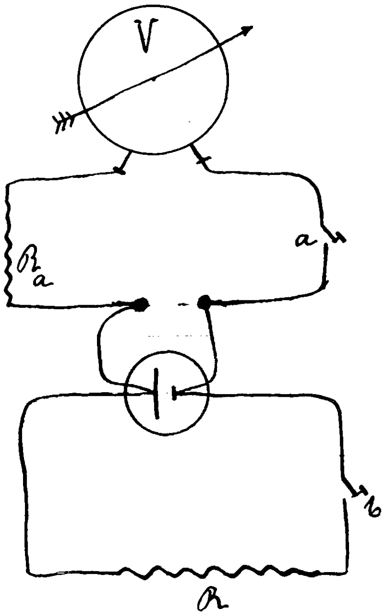
$$r = \frac{\alpha - R.\alpha'}{\alpha'}$$

La disposición practica es



2ª variante. — De la relación (2) se deduce

$$r = \frac{e-v}{i} = \frac{e-v}{\frac{v}{R}} = \frac{R(e-v)}{v}.$$



Abriendo b y cerrando a obtendremos una desviación $\alpha$ tal que

$$e = K.\alpha$$

Si se cierran las llaves a y b, mediremos en el galvanometro la diferencia de potencial $v$ que entre los bornes de la pila existe: se tendrá pues

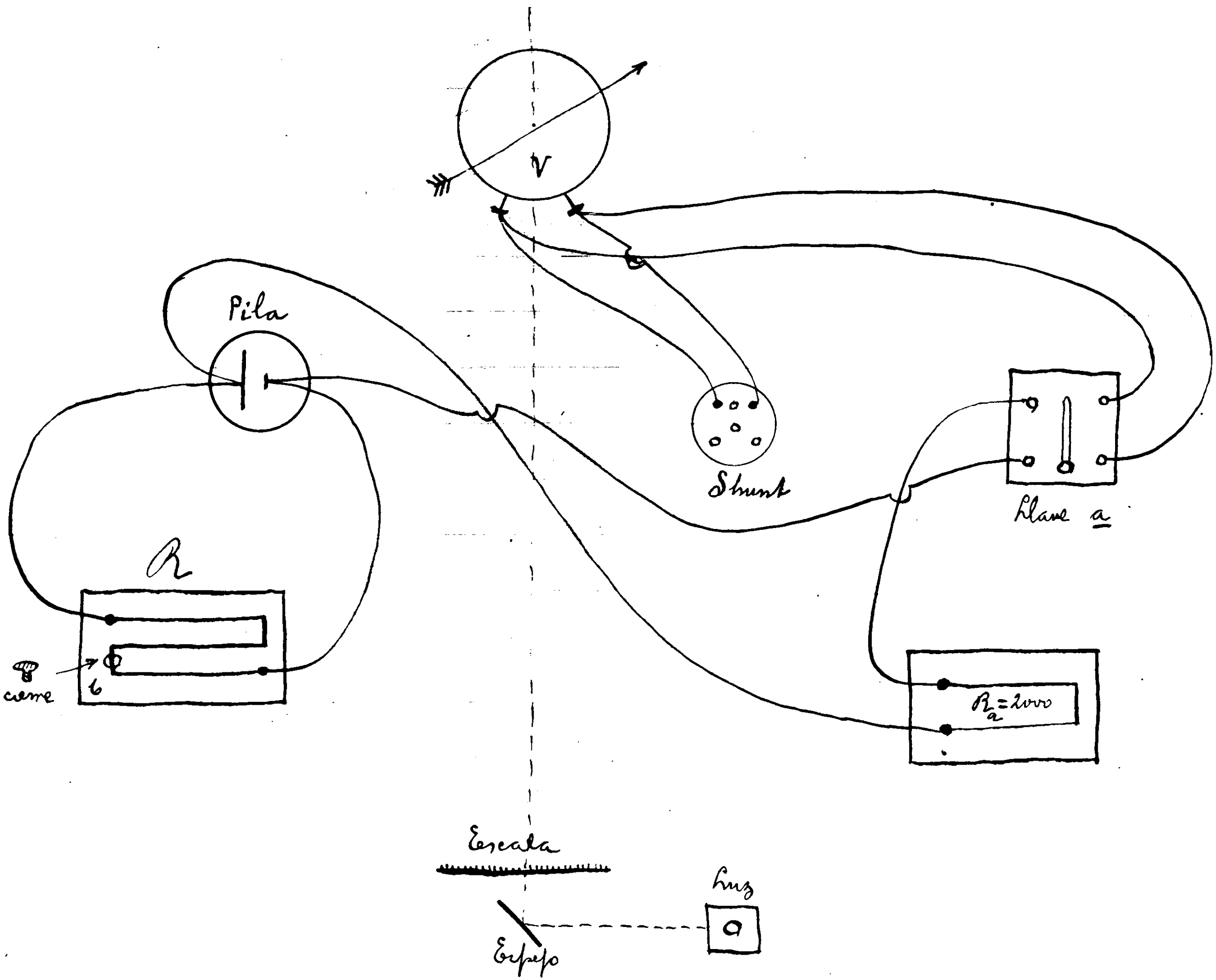
$$v = K.\alpha'$$

luego

$$r = \frac{R(\alpha - \alpha')}{\alpha'}$$

Se necesita pues, para aplicar esta variante conocer la resistencia R que puede ser la de una caja. La disposición practica está á continuación

3ª variante. Consiste en medir $e$, $v$, $i$ sin tener en cuenta el valor de R. Se puede efectuar con dos galvanometros ó con uno solo. En el primer caso la figura a indica la disposición de la operación: abriendo b y cerrando a



V
Pila
Shunt
Llave a
R
cierre
b
$R_a = 2000$
Escala
Luz
Espejo

tendremos $$e = K' . \alpha$$
en el voltmetro $V$; cerrando $\underline{a}$ y $\underline{b}$ mediremos en el $V$
$$v = K' . \alpha'$$
Abriendo $\underline{a}$ y cerrando $\underline{b}$ se obtendrá finalmente
$$i = K . \alpha''$$
luego $$r = \frac{K'}{K} . \frac{\alpha - \alpha'}{\alpha''}$$

La lectura en $A$ pudo haberse hecho al mismo tiempo que la segunda en $V$ pues $R_a$ es muy grande, deduciendose sensiblemente el mismo resultado.
Empleando un solo galvanometro, se dispondran las cosas como indica la figura $\underline{6}$: abriendo $\underline{b}$ y haciendo pasar la corriente por $1, 2, \alpha, \mathcal{E}$ obtendremos
$$e = K . \alpha$$
En las mismas condiciones y cerrando $\underline{b}$ se tendrá
$$v = K . \alpha'$$
Pasando la corriente por $3, 4, \alpha', \mathcal{E}'$ y $\underline{b}$ cerrada, será
$$i = \frac{V}{1\,\text{ohm}} = \frac{K . \alpha''}{1}$$

$$e = I(r+\rho+r') - ir'$$
$$e' = Ir' - i(g+\rho'+r')$$

de donde se saca

$$i = \frac{er' - e'(r+\rho+r')}{(\rho'+g)(r+\rho+r') + r'(r+\rho)} = K.\alpha$$

Variando las resistencias $r$ y $r'$ convenientemente se puede hacer que la desviación en el galvanometro $\alpha$ sea cero por lo cual

$$er' - e'(r+\rho+r') = 0 \quad " \quad \frac{e}{e'} = \frac{r+\rho+r'}{r'} \quad (1)$$

igualdad que sirve de fundamento al metodo.

Si conociesemos las fuerzas electromótrices $e'$ y $e$ se podria determinar la resistencia interior $\rho$ de $e$: pero se emplea generalmente dicha relación para encontrar diferencias de potencial, procurando que $r$ y $r'$ sean muy grandes con relación á $\rho$, por lo cual

$$\frac{e}{e'} = \frac{r+r'}{r'} \quad (2)$$

Cuando no se dispone de resistencias $r$ y $r'$ lo suficientemente grandes para que se pueda despreciar $\rho$, conviene repetir la operación adicionando $r_1$ y $r_1'$ á $r$ y $r'$ respectivamente, de modo que se tenga —

$$\frac{e}{e'} = \frac{r + r_1 + \rho + r' + r'_1}{r' + r'_1} = \frac{r + \rho + r'}{r'}$$

ó bien restando antecedentes y consecuentes

$$(3) \quad \frac{e}{e'} = \frac{r_1 + r'_1}{r'_1}$$

Con objeto de evitar las perturbaciones producidas por la variación de la fuerza electromotriz y resistencia interior en la pila $\underline{e}$; se elige para desempeñar su puesto unos cuantos elementos secundarios de resistencia pequeña; las pilas á comparar se colocan sucesivamente en $e'$. Establecido el regimen de equilibrio con un elemento de fuerza electromotriz $(e')$ conocida se tendrá anotadas que sean $\underline{r}$ y $\underline{r'}$.

$$(4) \quad \frac{e}{e'} = \frac{r + r' + \rho}{r'}$$

Se puede tomar $r' = 1000 . e'$ y buscar por tanteos el valor de $\underline{r}$ conveniente para que la desviación en el galvanometro sea cero. Sustituyendo despues esta pila, por otra de fuerza electromotriz desconocida $e'_1$, se varian las resistencias correspondientes $\underline{r_1}$ $r'_1$ de tal modo que

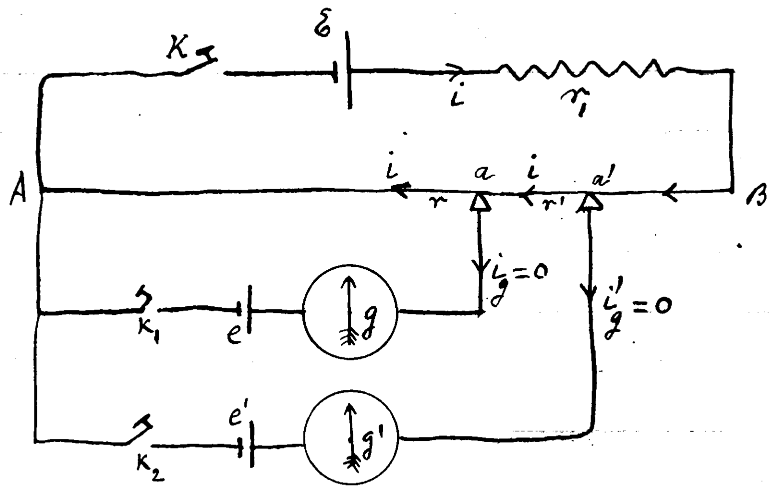
$$r_1 + r'_1 = r + r'$$

al mismo tiempo que la aguja del galvanometro vuelva á cero; entonces

$$(5) \quad \frac{e}{e'_1} = \frac{r_1 + r'_1 + \rho}{r'_1} = \frac{r + r' + \rho}{r'_1}.$$

Comparando (4) y (5) $$\frac{e'_1}{e'} = \frac{r'_1}{r'} = \frac{r'_1}{1000.e'}$$

luego $$e'_1 = \frac{r'_1}{1000}$$




El potenciómetro de Clark fundado en el método de oposición, está indicado por el adjunto esquema. Se coloca en $\mathcal{E}$ un acumulador cualquiera que produzca una corriente de intensidad constante $\underline{i}$ en un circuito formado de una resistencia $\underline{r_1}$ y un hilo AB de 2 á 3 metros en su longitud, con 50 á 60 ohmnios de resistencia. Cerrando las llaves K y $K_1$ se mueve la corredera $\underline{a}$ hasta que la desviación señalada por el galvanometro $\underline{g}$ se anule: llamando por $\underline{r}$ la resistencia del trozo de hilo Aa, se podrá escribir

$$e = i.r = i.\rho.\frac{l}{s} \quad [\rho = \text{resistencia específica}]$$

Efectuando la misma operación con las llaves K y $K_2$, corredera $\underline{a'}$ se llegará á la posición de equilibrio en el galvanometro $g'$ por lo que

$$e' = i.r' = i.\rho.\frac{l'}{s}$$

luego
$$\frac{e}{e'} = \frac{r}{r'} = \frac{l}{l'}$$
quedando de este modo reducida la comparación de fuerzas electromotrices á la medida de longitudes. Se necesita que el hilo tenga la misma sección s en toda su longitud. Si no se tuviese mas que un galvanometro G, las dos pilas se colocan sucesivamente en e siendo distintas las posiciones del unico corredor a en los dos casos.

Constante balistica del galvanometro Arans-Loring. Por el procedimiento del condensador ya descripto y empleando un elemento Latimar-Clark, se encontró una desviación de 54 para una capacidad de 2 microfaradios: luego

$$K \times \alpha_1 = c.e = K \times 54 = 2 \times 1,434$$
$$K = 0^{m.C},053 \text{ (microculombios)}$$

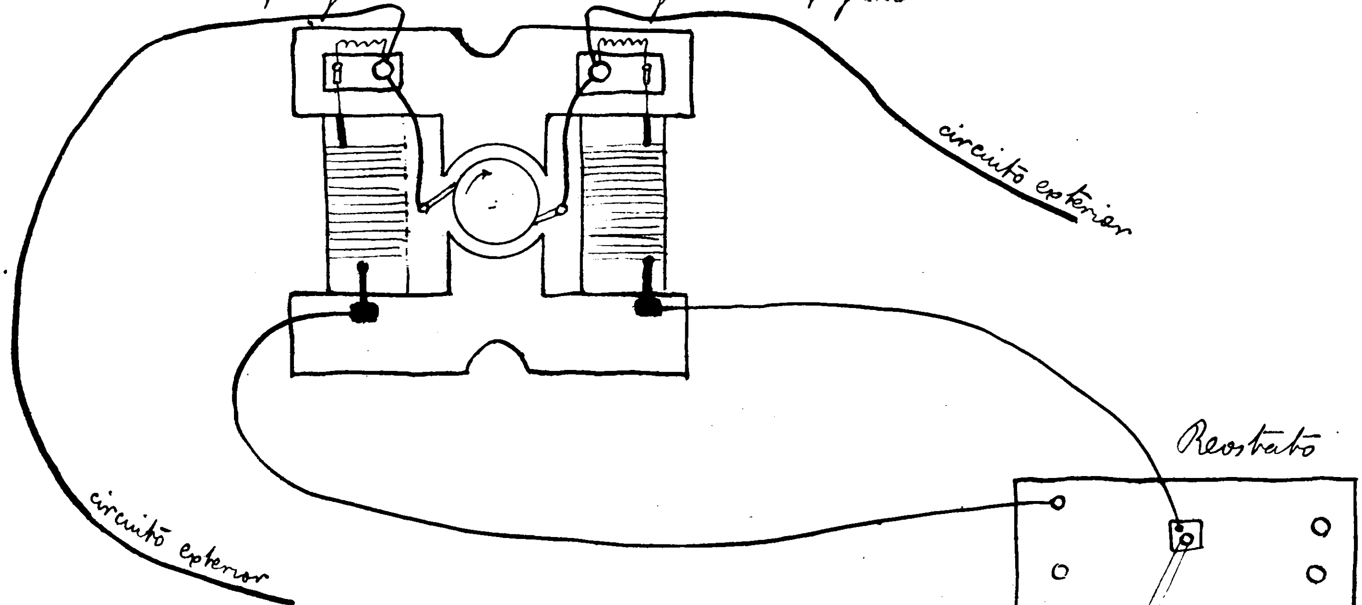
Se anotaron 5 oscilaciones dobles en 17″, de modo que una oscilación doble se efectua en 3″,40 y una semi-oscilación en $T = 1''{,}70$

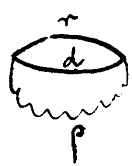
Constante balistica del galvanometro Carpentier. Siguiendo el mismo metodo se anotó una desviación de 66 para $e = 1^{volt},434$ " $c = 2$ m.F. Se tendrá

$$K \times \alpha_1 = c.e = K \times 66 = 2,868$$
$$K = 0^{m.C},0434$$

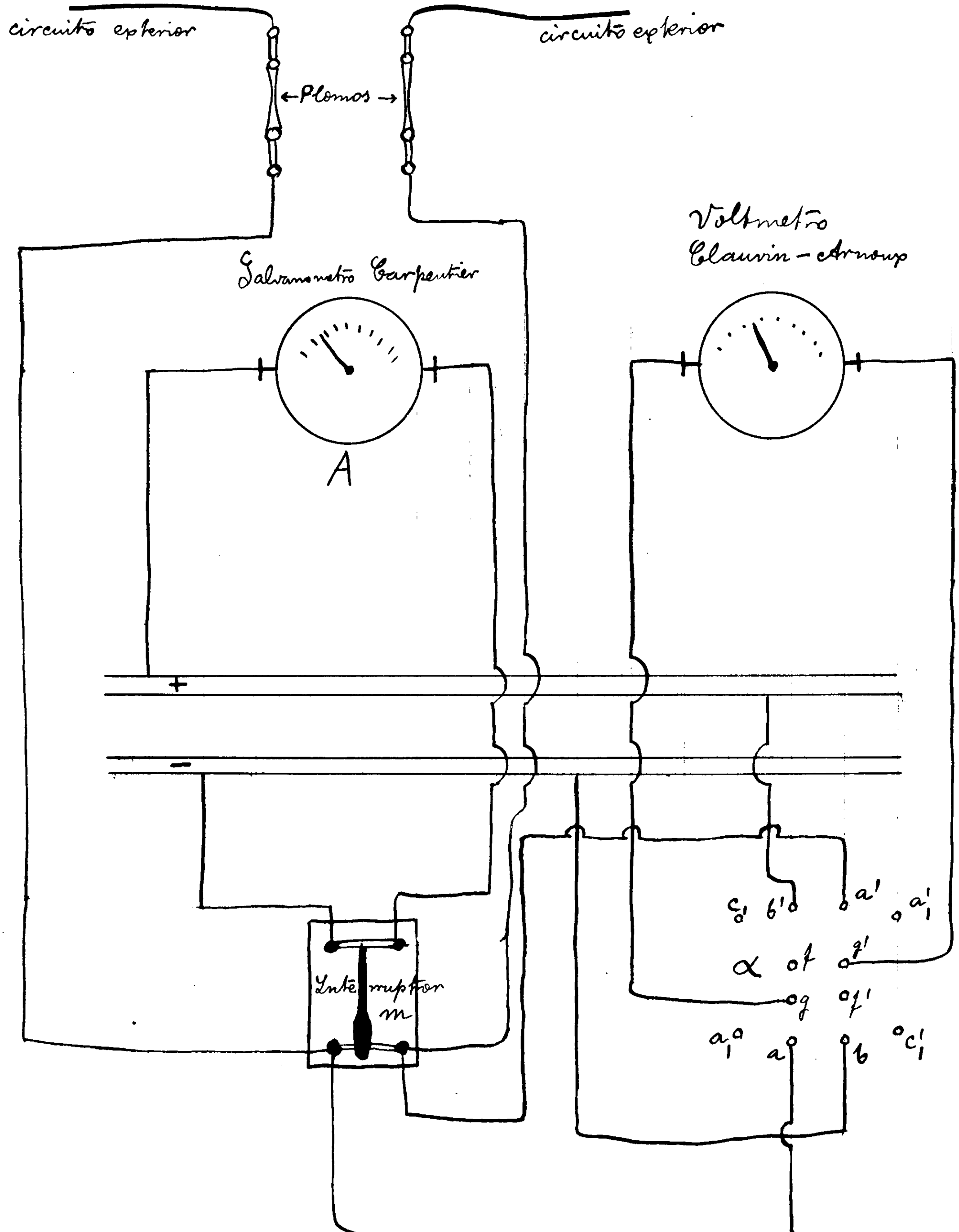
En 79″ se contaron 5 oscilaciones dobles, luego una oscilación tarda 15″.8 en efectuarse por todo lo cual $T = 7''{,}9$.

<u>Dinamo bipolar de Pieper</u>. Los inductores son del tipo Manchester, con piezas polares estranguladas para reducir los flujos transversales; está excitada en derivación. Con objeto de poder variar el flujo inductor hay un reostato en serie con la bobina inductora, segun muestra la siguiente figura



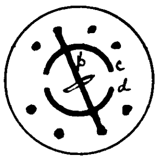




(Fig x)



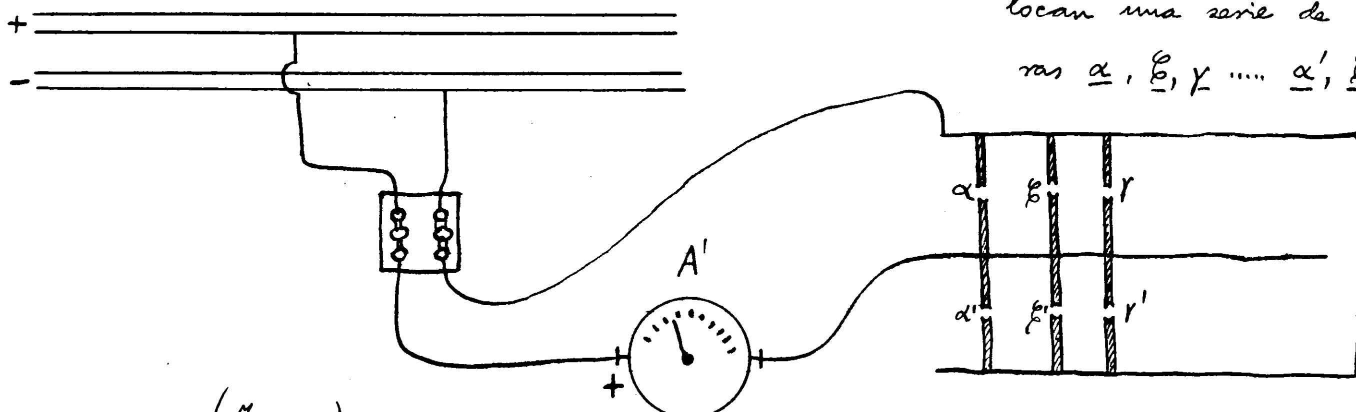

Conexiones en el cuadro. (Fig 5)

Para medir la intensidad y el voltaje de la corriente que circula por el circuito exterior se disponen las conexiones como en la figura anterior: el interruptor (α) del voltmetro está compuesto de dos sectores c y d en comunicación con él, ya por los botones f




y f', ya por los g y g'; la palanca p puede apoyarse sucesivamente sobre los cuatro pares de botones $a_1$, $a'_1$, $a$, $a'$, $b$, $b'$ $c'_1$, $c_1$. Estando abierto el interruptor y la palanca p apoyada sobre a, a', por la inspección de la figura se deduce que el galvanometro quedará inactivo, mientras el voltmetro se moverá: cerrando el interruptor y apoyando p sobre b, b' la corriente pasará por el galvanometro y por el voltmetro.

Con objeto de hacer variar la intensidad de la corriente en el circuito exterior, se colocan una serie de lamparas α, β, γ ..... α', β' γ'.....



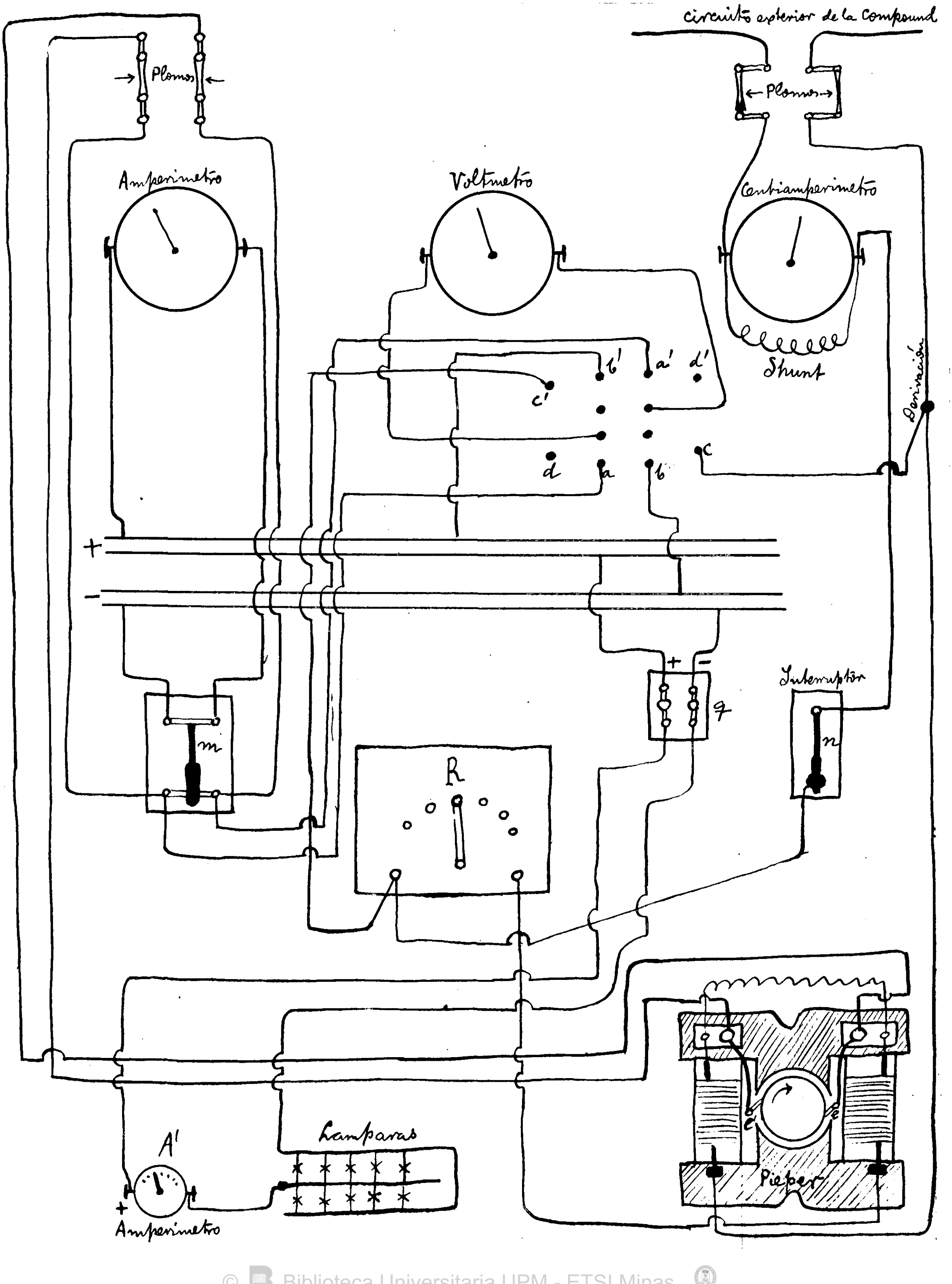

(Fig x)

Estando la palanca p sobre a, a' y se quitan las lamparas del circuito, claro es que la corriente exterior queda cortada, y que irá aumentando á medida que se van poniendo, si suponemos que el interruptor está cerrado. Sucede lo contrario, cuando la palanca p se apoya contra b, b'; sin lamparas la desviación en A es maxima y nula en A', disminuyendo en A y aumentando en A' cuando aquellas aumentan si suponemos en ambos casos que el interruptor está cerrado.

## Característica á circuito abierto.

Para trazar esta curva es preciso excitar los inductores por la corriente producida con otra dinamo: haciendola variar, se van anotando las diferencias de potencial á circuito abierto para cada una de ellas y estas dos series de valores nos dan las abcisas y ordenadas que se buscan. Esta curva se trazó para la dinamo Pieper, valiendose de la corriente producida por una Compound despues de poner en corto circuito sus inductores en derivación, empleando unicamente los dispuestos en serie; para que la dinamo Pieper no se alimente ella misma, menester es, poner en corto circuito su inductor, rompiendo las relaciones que con el inducido tenga.

Todos los detalles de esta disposición se encuentran indicados en la siguiente figura. Se abre el interruptor m y se quitan los plomos en q para que la corriente $i_e$ del circuito exterior de la dinamo Pieper sea cero: marchando las Compound y Pieper, cerramos el interruptor

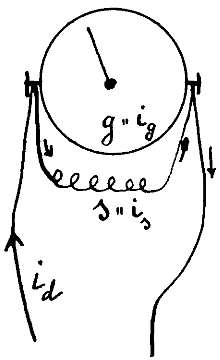

circuito exterior de la Compound
Plomos
Plomos
Amperimetro
Voltmetro
Centiamperimetro
Shunt
b'
a'
d'
c'
d
a
b
c
Derivación
+
−
m
+
−
q
Interruptor
n
R
Lamparas
A'
+
Amperimetro
Pieper

n para excitar á esta, pudiendose medir el voltaje de la corriente excitadora por el volt metro, cuando se coloca la palanca p sobre c, c'. Como lo que se desea es la diferencia de potencial entre las escobillas e, e' de la Pieper, habrá que situar la palanca p contra a, a', haciendose las lecturas en el voltmetro Chevaux-Arnoux: la intensidad de la corriente de excitación se indica en el centiamperímetro, siendo preciso rectificarlas por existir shunt. En estas condiciones no habrá mas que actuar sobre el reostato R, anotando las lecturas del voltmetro y amperimetro: se procura que en todo este tiempo permanezca constante la velocidad de la dinamo. Las desviaciones anotadas fueron

| Corriente de excitación á deducir | Voltaje |
|---|---|
| 0.32 | 81 |
| 0.36 | 90 |
| 0.41 | 101 |
| 0.455 | 111 |
| 0.52 | 123 |
| 0.58 | 132 |

Para encontrar los verdaderos valores de la corriente de excitación, hay que conocer la resistencia del shunt y la del centiamperímetro: efectuadas estas medidas con la caja Silvertown ya descripta resultó $s = 0^{ohm}.80$ " $g = 2,35^{ohms}$. Como lo que se lee en el amperímetro es $i_g$ y lo que se busca $i_d$, se tiene

$$i_d = i_g \times \frac{s+g}{s} = 3,9375 \times i_g$$




Así pues

| Valores de $i_g$ | Valores de $i_d$ |
|---|---|
| 0.32 | 1,260 |
| 0.36 | 1.417 |
| 0,41 | 1.614 |
| 0.455 | 1.811 |
| 0.52 | 2.047 |
| 0,58 | 2,283 |

Trazada la curva con los datos anteriores, resultó de forma bastante satisfactoria. El número de vueltas de la máquina se mantuvo sensiblemente igual á 138.

<u>Curvas de reacción de inducido</u>. Las reacciones de inducido pueden determinarse por la diferencia entre las ordenadas de la característica á circuito abierto y otras que ahora trazaremos; para esto, se mantiene en el inducido de la dinamo Pieper un régimen de corriente invariable por medio de resistencias exteriores, mientras se anotan

los diferentes valores de la corriente de excitación y de las diferencias de potencial. Para cada cada intensidad constante de la corriente del inducido se tendrá una curva distinta.

Las conexiones se efectuan conforme la figura ultima: cerrando los interruptores m y n, apretando los plomos en q se graduan las lamparas de tal modo que en el amperimetro A' se lea constantemente 5 amperios; variando la posición del reostato R se anotan las desviaciones simultaneas del voltmetro y del centiamperimetro. La palanca p debe estar sobre a, a'. Se observaron procediendo de este modo

| Valores de $i_g$ | Valores de $i_d$ | Voltaje |
|---|---|---|
| 0.32 | 1.259 | 78 |
| 0.36 | 1.417 | 86 |
| 0.38 | 1.496 | 95 |
| 0.44 | 1.732 | 107 |
| 0.56 | 2.204 | 123 |

La maquina dió constantemente 138 vueltas en un minuto.

Aumentando el numero de lamparas para hacer $i_e = 15$ amperios y siguiendo la misma marcha, se encontro

| Valores de $i_g$ | Valores de $i_d$ | Voltaje |
|---|---|---|
| 0.325 | 1.279 | 77 |

| Valores de $i_g$ | Valores de $i_d$ | Voltaje |
|---|---|---|
| 0.355 | 1.397 | 83 |
| 0.375 | 1.476 | 90 |
| 0.455 | 1.791 | 102 |
| 0.52 | 2,047 | 110 |

La maquina se movió á razon de 136 vueltas por minuto.

Finalmente para $i_e = 25$ amperios, se halló

| Valores de $i_g$ | Valores de $i_d$ | Voltaje |
|---|---|---|
| 0.33 | 1.299 | 76 |
| 0.355 | 1.397. | 80 |
| 0.38 | 1.496 | 87 |
| 0.465 | 1.830 | 100 |

dando la maquina unas 132 vueltas.

Trazadas estas curvas, presentaron un aspecto bastante aceptable.

Caractéristica exterior. Para trazar esta curva hay que exitar la dinamo por si misma sin auxilio de la maquina Compound; midiendo las intensidades de la corriente en el circuito exterior y las diferencias de potencial entre las escobillas se tendran las abcisas y ordenadas buscadas. El esquema que tendremos necesidad de disponer es el indicado al describir la dinamo Pieper ó sean las figuras x, y, z unidas: la intensidad se medirá en el amperímetro A' de la z por ser poco sensible el de Carpentier colocado en el cuadro. Colocando la palanca p sobre a, a' y abriendo el interruptor m se hace marchar la dinamo, anotandose el voltaje cuando el numero de vueltas llegue á su estado normal: tendremos asi la primera observación correspondiente á $i_e = 0$ si se ha cuidado de no tener lampara alguna en el circuito. Cerrando el interruptor y encendiendo lamparas se van obteniendo diferentes voltajes é intensidades que se anotan hasta agotar todas las lamparas. En toda la operación anterior no se debe actuar sobre el reostato.

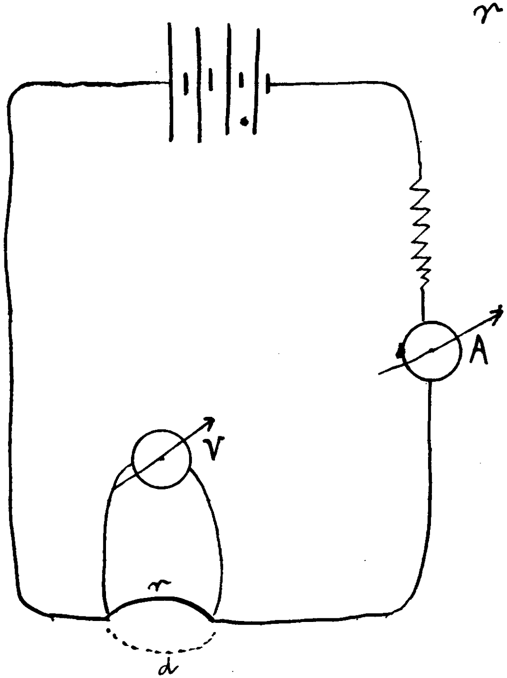
Los valores encontrados fueron

| Intensidad de la corriente | Voltaje | Resistencias exteriores |
|---|---|---|
| 0 | 120 | $\infty$ |
| 5 | 116 | 23,2 |
| 10 | 110 | 11 |
| 15 | 98 | 6,53 |
| 19 | 67 | 3,53 |

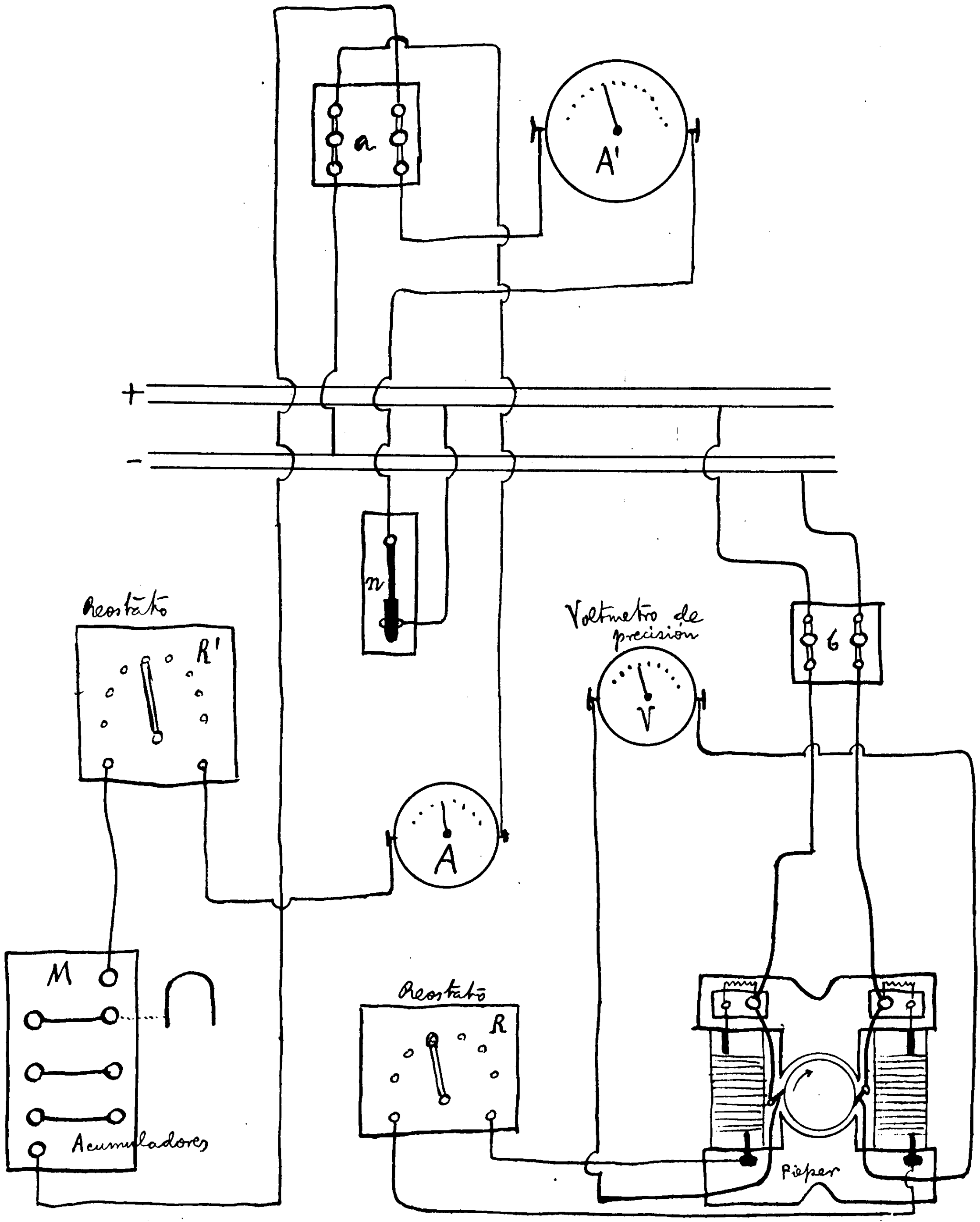
La maquina se mantuvo constantemente en 136 vueltas por minuto. Trazada la curva resultó de forma muy aceptable.

**Resistencia del inducido**. Un dato muy importante segun veremos y que importa medir, es la resistencia del inducido; es preciso para ello enviarle una corriente de intensidad conocida, anotando al mismo tiempo la diferencia de potencial que entre sus extremidades se produce. La resistencia valdrá

$$r = \frac{v}{i}$$




Rompiendo la unión entre el inductor é inducido, se envia á este la corriente producida por cuatro elementos de acumulador medida en el amperimetro A: la diferencia de potencial se lee en el voltmetro V. El inducido debe tener la temperatura normal, para lo cual se le hace marchar previamente antes de enviarle la corriente; en la resistencia medida va incluida la de contacto entre escobillas y colector que algunas veces ocasiona caidas de voltaje considerables.


a
A'
+
-
n
Reostato
R'
Voltmetro de precisión
V
b
A
M
Acumuladores
Reostato
R
Pieper

La unión del inductor con el inducido se rompe por el reostato R poniendolo en la resistencia infinito. Las conexiones se efectuan conforme se indica en la figura anterior; los cuatro elementos de acumuladores M se unen á las barras por medio del Reostato R', amperimetro A y plomos $\underline{a}$, asi como tambien por el amperimetro A' é interruptor $\underline{n}$: de las barras para la corriente al inducido por los plomos $\underline{b}$. Los terminales del voltmetro de precisión V se sostienen el tiempo preciso contra las escobillas. Graduando R' para que la desviación en A ó A' no sea muy grande, no habrá mas que leer en estos amperimetros y en el voltmetro V despues de haber cerrado el interruptor $\underline{n}$ y los plomos $\underline{a}$ y $\underline{b}$. Para el inducido de la maquina Pieper se obtuvo $i = 10$ amperios, $v = 2,5$ voltios luego

$$r = \frac{2,5}{10} = 0,^{\text{ohms}}25$$

## Rendimiento y rozamentos.

El rendimiento de la dinamo es la relación entre la potencia recogida en el circuito exterior y la suministrada por la maquina de vapor: la primera esta dada por el producto de la intensidad de la corriente por la diferencia de potencial entre las escobillas, cantidades medidas respectivamente por un amperimetro y un voltmetro. La potencia producida por la maquina de vapor esta expresada por la formula

$$W = \frac{P_m \times 2s \times c \times N}{33000} \text{ caballos de vapor}$$

siendo

$P_m$ = presión media en libras

$s$ = sección del embolo = 33,18 pulgadas cuadradas

$c$ = carrera del embolo = 1 pié ingles = $0^m.30$

33000 piés libras al minuto equivalen á un caballo de vapor

$N$ = numero de vueltas de la maquina en un minuto

Pero como $\frac{2s \times c}{33000} = K = 0,0021$

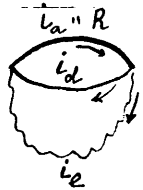
resulta la expresión del trabajo en 1"

$$W = 0,0021 \times P_m \times N$$

El valor de $P_m$ vendrá dado por los diagramas que se tomen en la maquina de vapor; midiendo por una escala, las libras que representan un cierto numero de ordenadas trazadas en las curvas correspondientes á una cara y otra del pistón, se tendran los elementos para formar la media, ó sea $P_m$. El numero $N$ se mide con un cuentavueltas: es una operacion delicada que puede falsear en mucho á los resultados.

El rendimiento vendrá expresado por $\frac{e'i_e}{W}$.

Designando por $R$ la resistencia del inducido, que ya sabemos como se mide, la energía consumida por efecto Joule valdrá $R i_a^2$; como $i_a$ no se pueda medir directamente nos valdremos de la relación




$$i_a = i_e + i_d$$

evaluando previamente $i_d$. Esto se consigue intercalando en la bobina inductora un centiamperímetro de resistencia $g$ con su shunt $s$: llamando por $i_g$ la intensidad medida en aquel, se tendrá

$$i_d = i_g \times \frac{s+g}{s}$$

La potencia gastada en la excitación de la dinamo viene evidentemente expresada por el producto $e' . i_d$. Los rozamientos electromagneticos y mecanicos valdran pues

$$\text{Rozamientos} = W - e' i_e - R i_a^2 - e' i_d$$

Ahora bien

$$e' = e - R . i_a$$

luego

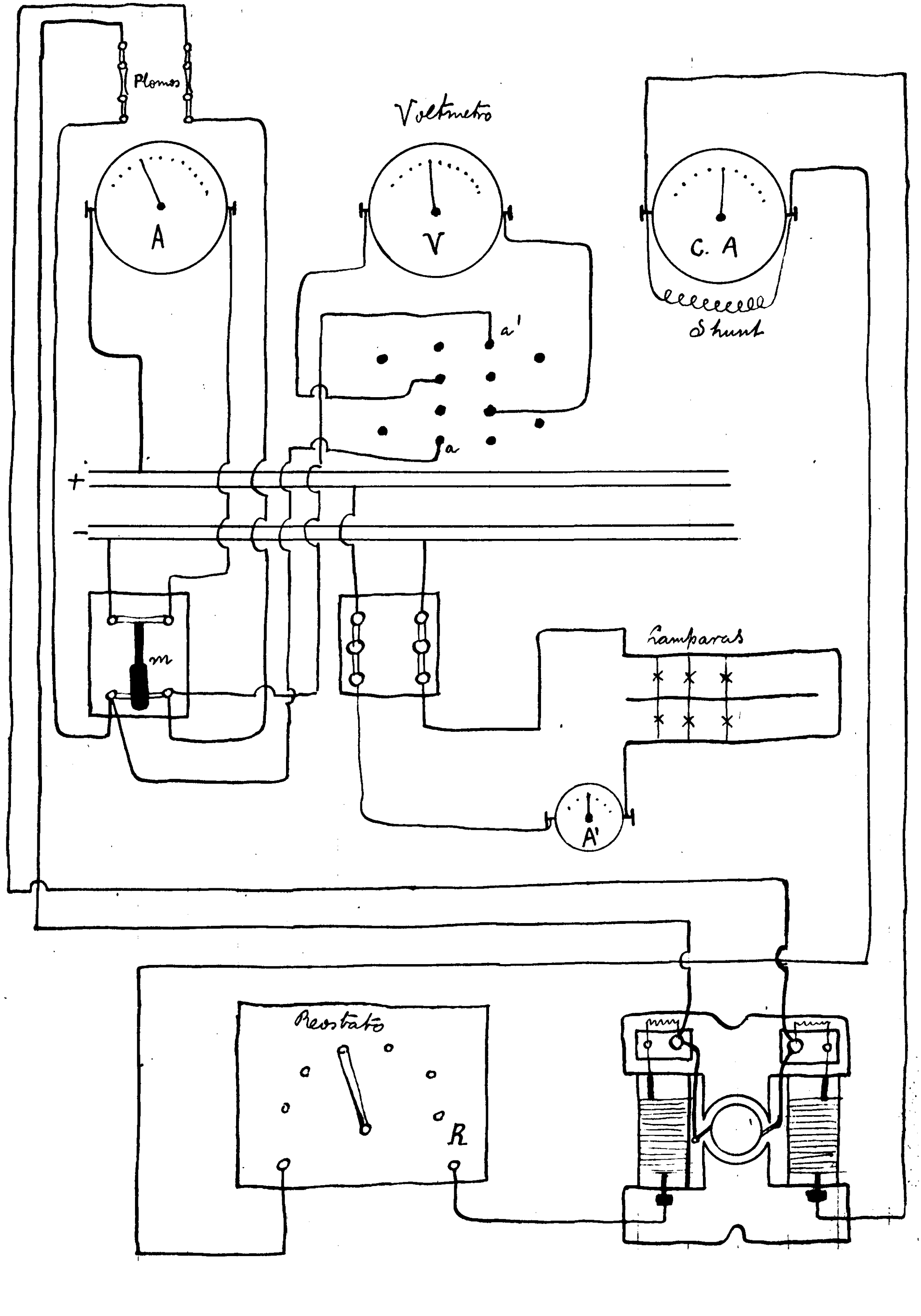
$$e' i_a = e i_a - R . i_a^2 = e' i_e + e' i_d$$

$$e i_a = e' i_e + e' i_d + R . i_a^2$$

por lo cual

$$\text{Rozamientos} = \text{Potencia} - e i_a$$

Resulta pues, que las medidas electricas á efectuar son las de $i_e$, $e'$, $i_d$: las mecanicas se refieren á $N$ y $P_m$. Se debe trabajar á voltaje $e'$ constante, con objeto de observar las variaciones del rendimiento y de las perdidas por rozamientos pues



Plomos
Voltmetro
A
V
C. A
Shunt
a'
a
+
−
m
Lamparas
A'
Reostato
R

que la intensidad $i_e$ la haremos variar. Colocando la palanca $p$ sobre $a, a'$, cerrando el interruptor $m$ y modificando convenientemente la resistencia en el reostato $R$ hasta conseguir en el voltmetro $V$ un numero fijo, despues de haber encendido unas cuantas lamparas, se medirá $i_g$ en el centiamperimetro é $i_e$ en $A$ ó $A'$; variando el numero de lamparas y actuando sobre $R$ hasta obtener el mismo voltaje, se tendran nuevos valores $i'_d$, $i'_e$. Asi se prosigue hasta agotar todas.

Despues de varios ensayos infructuosos, por resultar excesivo el valor encontrado para el rendimiento, se consiguió obtener los datos siguientes

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| I observación | $N = 134$ | $e' = 100$ | $i_e = 0$ | $i_d = 1^A.20$ |
| II " | $N = 136$ | $e' = 100$ | $i_e = 5^A.70$ | $i_d = 1^A.30$ |
| III " | $N = 136$ | $e' = 100$ | $i_e = 10^A$ | $i_d = 1^A.40$ |
| IV " | $N = 136$ | $e' = 100$ | $i_e = 19^A.5$ | $i_d = 1^A.50$ |
| V " | $N = 136$ | $e' = 100$ | $i_e = 27^A.4$ | $i_d = 1^A.60$ |
| VI " | $N = 132$ | $e' = 100$ | $i_e = 31^A.2$ | $i_d = 1^A.65$ |

Las presiones medias en libras fueron

6.98 9,84 10,32 13,08 15.80 19.44

que sustituidos en la formula del trabajo, dan para valor de éste en caballos y watios respectivamente

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Potencia en caballos | 1.86 | 2,81 | 2,93 | 3.74 | 4.51 | 5.39 |
| Potencia en watios | 1,369 | 2,068 | 2,157 | 2,753 | 3.319 | 3.967 |

La potencia recogida en el circuito exterior: $(e'i_e)$, valdrá en las seis observaciones

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de $e'i_e$ en watios | $0^w$ | $570^w$ | $1000^w$ | $1950^w$ | $2540^w$ | $3120^w$ |

luego el rendimiento será en cada caso

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0,28 | 0,46 | 0.71 | 0,76 | 0.79 |

La potencia gastada en la excitación de la dinamo, es en watios

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de $e'i_d$ | 120 | 130 | 140 | 150 | 160 | 165 |

La energía consumida por efecto Joule en el inducido, es en watios

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Valores de $R\,i_a^2$ | 0.36 | 12,25 | 32,50 | 110,25 | 182,25 | 269.75 |

habiendose tomado para resistencia del inducido 0,25 ohmnios.

Para el producto $e\,i_a = e'i_e + e'i_d + R.i_a^2$ resultan los valores en watios

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 120,36 | 712,25 | 1172,50 | 2210,25 | 2882,25 | 3554.75 |

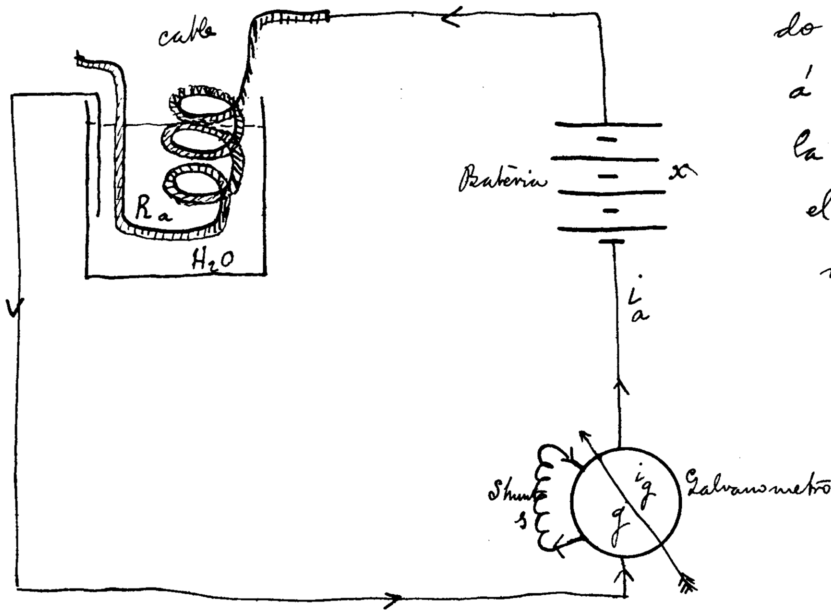
El valor de los rozamientos mecánicos en el motor, correa y dinamo, corrientes de Foucault é hysteresis, será tomandolos por diferencia

$\overset{W}{1248.64}$ „ $\overset{W}{1355.75}$ „ $\overset{W}{984.50}$ „ $\overset{W}{542.75}$ „ $\overset{W}{436.75}$ „ $\overset{W}{412.25}$

La corriente en el circuito exterior se ha medido con el electrodinamometro de Siemens, en vista de la inseguridad de las indicaciones de los amperimetros. La de excitación, intercalando una resistencia de 0.1 ohms y tomando en el voltimetro de precisión Siemens la diferencia de potencial.

# Resistencia del aislamiento de cables.

La resistencia del estuche protector de los cables está fuera de proporción con las otras resistencias ya medidas. Si la envolvente es impermeable se le introduce en un depósito con $H_2O$ con las extremidades completamente secas y saliendo de la cuba, estando una de ellas unida por el alma á una batería de acumuladores y la otra libre. Cerrando el circuito por el agua y poniendo en serie un galvanometro con su shunt, leeremos en este una desviación $\alpha_1$; llamando $i_a$ la corriente total, $R_a$ la resistencia á medir, $g$ la del galvanometro y $x$ la correspondiente á las baterias de fuerza electromotriz



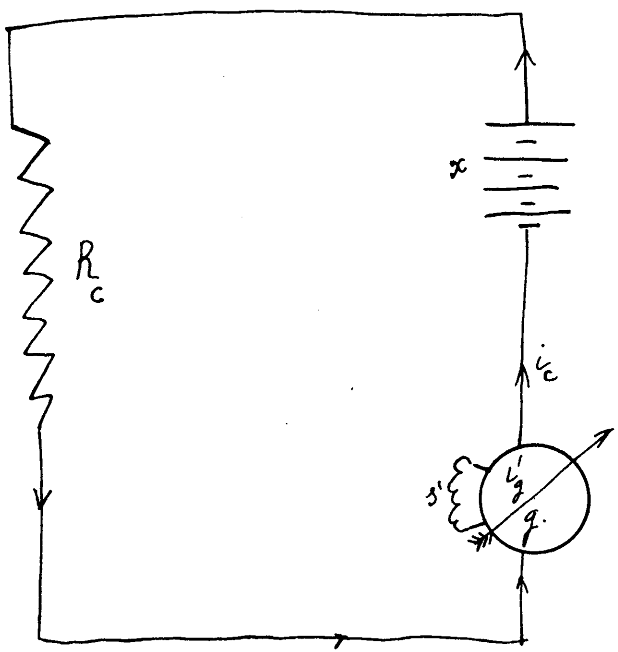
$\underline{e}$ , se tendrá

$$i_a = m_1 \text{ (poder multiplicador) } \times i_g = \frac{e}{R_a + x + gs/_{g+s}}$$

$$i_g = K \cdot \alpha_1$$

luego

$$m_1 K \cdot \alpha_1 = \frac{e}{R_a + x + gs/_{g+s}}$$




Sustituyendo el cable por una resistencia conocida $R_c$ y colocando un shunt menor para que las desviaciones del galvanometro se mantenga dentro de limites prudenciales, estableceremos de un modo analogo

$$i_c = m_2 \cdot i'_g = m_2 \cdot K \cdot \alpha_2$$

$$i_c = \frac{e}{R_c + x + \frac{gs'}{g+s'}}$$

$$m_2 \cdot K \cdot \alpha_2 = \frac{e}{R_c + x + \frac{gs'}{g+s'}}$$

luego
$$\frac{m_1 \alpha_1}{m_2 \alpha_2} = \frac{R_c + \frac{g \cdot s'}{g+s'} + x}{R_a + \frac{g \cdot s}{g+s} + x}$$

Despreciando las resisténcias del galvanometro, bateria, é hilos de conexión, por ser pequeñas ante $R_a$ y $R_c$ se tendrá

$$R_a = R_c \times \frac{m_2 \alpha_2}{m_1 \alpha_1}$$

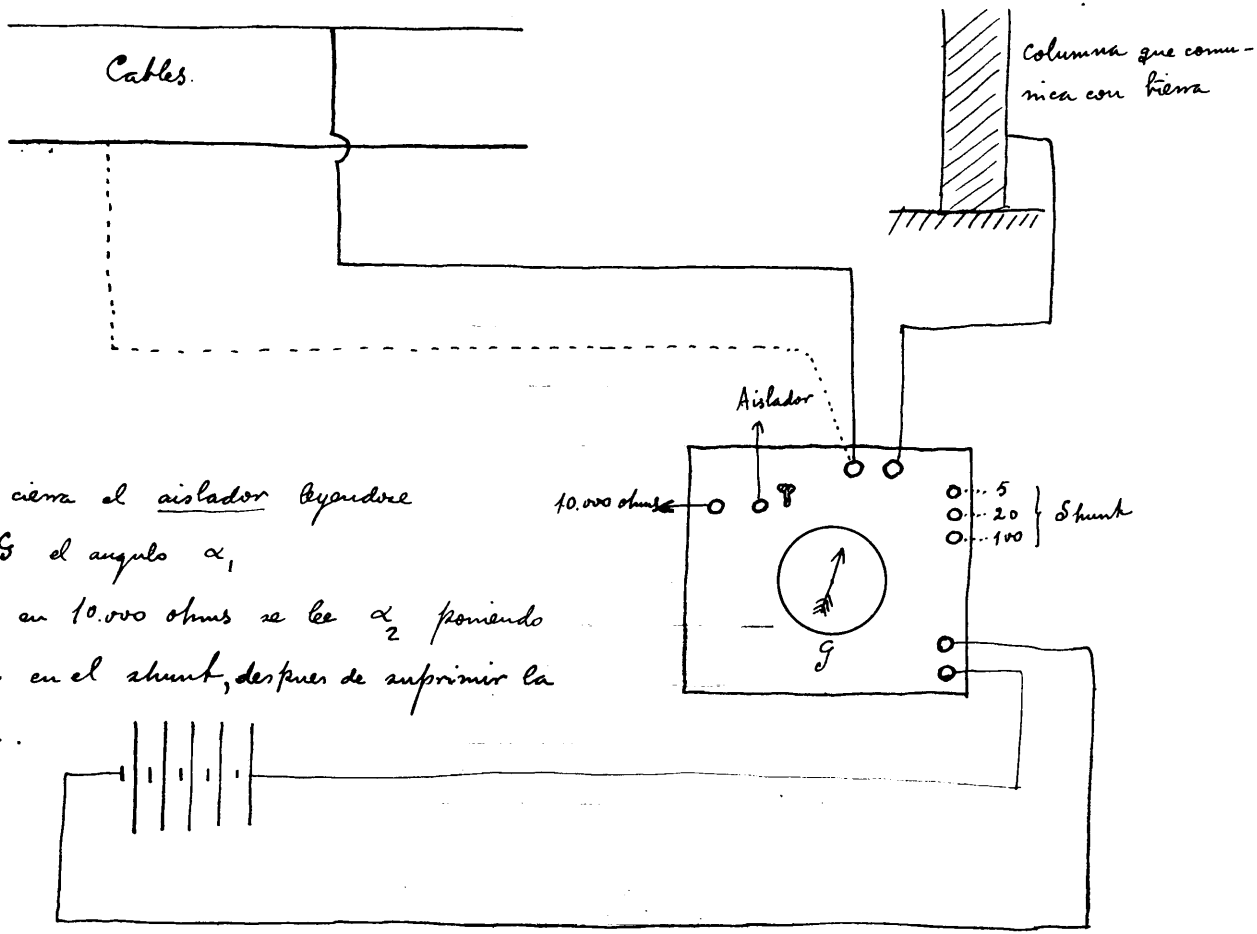
Al efectuar la lectura $\alpha_1$ no se suele poner shunt, por ser la desviación pequeña: entónces $i_a = i_g$ y $m_1 = 1$ lo que hace

$$R_a = R_c \times \frac{m_2 \cdot \alpha_2}{\alpha_1}$$

La desviación $\alpha_1$ varia generalmente segun el tiempo que se haga pasar la corriente pues existe acumulación lenta de carga residual; con objeto de obtener resultados comparables se conviene en tomar la desviación despues de uno ó dos minutos de electrización.

Cuando se indica la resistencia de un aislante es indispensable hacer conocer el metodo empleado y las condiciones en las cuales el ensayo ha sido hecho, porque variando los procedimientos se pueden encontrar resultados distintos á causa de fenomenos de polarización en la resisténcia de los dialectricos compuestos, todavia mal estudiados.

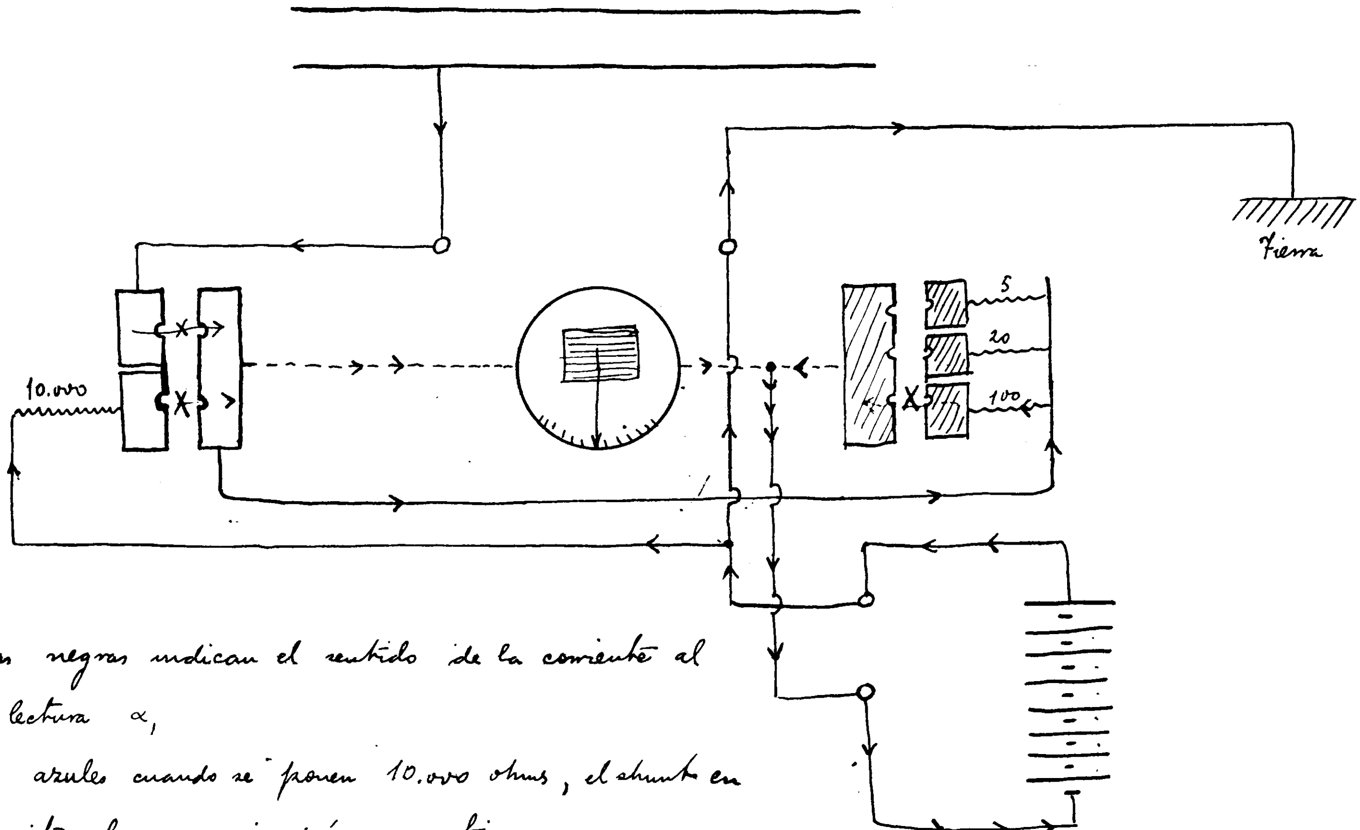
En vez de cerrar el circuito por agua, puede hacerse por tierra. La medida se efectua con una Silvertown ya descripta como puente de Wheatstone. Las cosas se disponen del modo siguiente




Con una clavija se cierra el <u>aislador</u> leyendose en el galvanometro G el angulo $\alpha_1$

Colocando la clavija en 10.000 ohms se lee $\alpha_2$ poniendo si es necesario otra en el shunt, despues de suprimir la comunicación con tierra.

Las conexiones internas y la marcha de la corriente se ven mejor en el esquema siguiente




Las flechas negras indican el sentido de la corriente al hacer la lectura $\alpha$,
Las flechas azules cuando se ponen 10.000 ohms, el shunt en 100 y se quita la comunicación con tierra

Medidas hechas con dos trozos de cables, arrojaron los resultados siguientes

Primer trozo ....... $\begin{cases} \alpha_1 \text{ ....... } = 3 \text{ divisiones " sin shunt " } m_1 = 1 \\ \alpha_2 \text{ ....... } = 9,5 \text{ divisiones " con shunt " } m_2 = 100 \end{cases}$

La resistencia valdrá

$$R_a = 10\,000^{\text{ohms}} \times \frac{100 \times 9,5}{3}$$

$$R_a = 3,2 \times 10^6 \text{ ohms} = 3,2 \text{ megaohms.}$$

Para el segundo trozo

$$\alpha_1 \text{ ....... } = 5 \text{ divisiones ..... sin shunt " } m_1 = 1$$

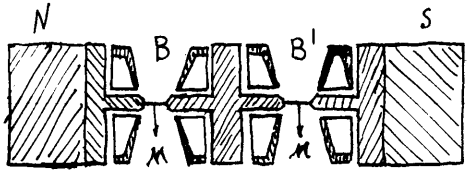
luego

$$R_a = 10\,000^{\text{ohms}} \times \frac{100 \times 9,5}{5}$$

$$R_a = 1,9 \times 10^6 \text{ ohms} = 1,9 \text{ megaohms.}$$

Las medidas no son tan exactas como fuese de desear, á causa de perturbaciones producidas probablemente por tener tierra la batería de acumuladores.

Oscilógrafo de M. Blondel. Está compuesto esencialmente de una banda muy estrecha de hierro dulce cuya anchura es 0,5 milímetros como máximo, colocada verticalmente entre las piezas polares de un iman permanente poderoso. Las dos laminas de un oscilógrafo doble de este tipo estan proyectadas en M




para el corte horizontal indicado por la figura. Un par de bobinas B y B' recorridas por la corriente alternativa á estudiar tienen sus ejes perpendiculares á la linea N-S de los imanes; las laminas M estarán pues sometidas á la acción simultanea de las bobinas y del intenso campo magnetico. Segun el sentido de la corriente la lamina se desviará á derecha ó á izquierda hasta que haya equilibrio entre la acción de la bobina y el par resistente formado por los imanes.

Vamos á deducir las condiciones que debe satisfacer este aparato para que sus movimientos sea la interpretación exacta de las curvas buscadas. [Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas - Fisicas y Naturales — Abril - Julio 1904]

Como en la teoria del galvanometro balistico escribiremos que:

La derivada con relación al tiempo de la suma de los momentos de las cantidades de movimiento del sistema movil es igual á la suma de los momentos de los pares agentes.

$$\frac{d}{dt}\sum m.v.r = \sum \mathcal{C}.$$

pero

$$v = w.r$$

$$\sum m r^2 \times \frac{d w}{dt} = \sum m r^2 \times \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum \mathcal{C}$$

ó bien

$$\mu.\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \sum \mathcal{C}$$

siendo $\underline{\mu}$ el momento de inercia del sistema, $\underline{\alpha}$ el angulo variable de desviación, $\sum \mathcal{C}$ la suma de los pares motores y resistentes.

Supondremos que el par motor producido por la corriente alternativa sea función armonica sencilla del tiempo, de valor

$$B.\operatorname{sen} at$$

El amortiguamiento es producido por el aire y por las corrientes parasitas que se desarro yan durante el movimiento y cuyo momento es segun vimos al ocuparnos del galvanometro balistico

$$q.\frac{d\alpha}{dt}$$

El par resistente de torzión desarrollado por el hilo de suspensión es proporcional á la desviación y tiene por valor $r.\alpha$

La ecuación diferencial del movimiento es pues

$$\mu.\frac{d^2\alpha}{dt^2} + q.\frac{d\alpha}{dt} + r.\alpha = B.\operatorname{sen} at$$

ó bien

$$(1)\quad \frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{q}{\mu}\cdot\frac{d\alpha}{dt} + \frac{r}{\mu}\cdot\alpha = B.\ \text{sen}\, at$$

Considerando la ecuación

$$(2)\quad x^2 + \frac{q}{\mu}\cdot x + \frac{r}{\mu} = 0$$

podrán ocurrir los tres casos siguientes

1 — Raices reales y desiguales. $\frac{q^2}{4\mu^2} - \frac{r}{\mu} > 0$. — La solución general de la ecuación (1) es entonces

$$\alpha = K\ .\text{sen}(at-\varphi) + C_1\, e^{m_1 t} + C_2 . e^{m_2 t}$$

Para comprobarlo y hallar los valores de $K$, $\varphi$, $m_1$, $m_2$ derivemos dos veces con relación á $t$

$$\frac{d\alpha}{dt} = K.a.\cos(at-\varphi) + m_1 C_1 . e^{m_1 t} + m_2 . C_2 . e^{m_2 t}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -K\ a^2\, \text{sen}(at-\varphi). + m_1^2 . C_1 . e^{m_1 t} + m_2^2 . C_2 . e^{m_2 t}$$

y sustituyamos en (1)

$$\left[-K.a^2 . \text{sen}(at-\varphi) + \frac{q}{\mu}. K.a.\cos(at-\varphi) + \frac{r}{\mu}. K\ \text{sen}(at-\varphi) - \frac{B}{\mu}.\ \text{sen}\, at\right] +$$

$$+ C_1 . e^{m_1 t}\left(m_1^2 + \frac{q}{\mu}. m_1 + \frac{r}{\mu}\right) + C_2 . e^{m_2 t}\left(m_2^2 + \frac{q}{\mu}. m_2 + \frac{r}{\mu}\right) = 0$$

condición que se satisface haciendo

$$-K.\ a^2 . \text{sen}(at-\varphi) + \frac{q}{\mu}. K.a.\cos(at-\varphi) + \frac{r}{\mu}. K\ \text{sen}(at-\varphi) = \frac{B}{\mu}. \text{sen}\, at$$

$$m_1^2 + \frac{q}{\mu}. m_1 + \frac{r}{\mu} = 0$$

$$m_2^2 + \frac{q}{\mu} \cdot m_2 + \frac{r}{\mu} = 0$$

Estas dos ultimas relaciones nos dicen que $m_1$ y $m_2$ son las raices reales y desiguales de la ecuación (2) valiendo por tanto

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = -\dfrac{q}{2\mu} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4\mu^2} - \dfrac{r}{\mu}} \\[2ex] m_2 = -\dfrac{q}{2\mu} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4\mu^2} - \dfrac{r}{\mu}} \end{array} \right.$$

Suponiendo $at = 0$ y $at = \frac{\pi}{2}$ la primera relación se transforma en

$$a^2 \cdot \operatorname{sen}\varphi + \frac{q}{\mu} \cdot a \cdot \cos\varphi - \frac{r}{\mu} \cdot \operatorname{sen}\varphi = 0$$

$$-K \cdot a^2 \cdot \cos\varphi + \frac{q}{\mu} K \cdot a \cdot \operatorname{sen}\varphi + \frac{r}{\mu} \cdot K \cos\varphi = \frac{B}{\mu}.$$

de donde

$$\operatorname{tag}\varphi = \frac{\frac{q}{\mu} \cdot a}{\frac{r}{\mu} - a^2}$$

$$K \left[ a \cdot \frac{q}{\mu} \cdot \operatorname{tag}\varphi + \frac{r}{\mu} - a^2 \right] = \frac{B}{\mu} \cdot \frac{1}{\cos\varphi}$$

sustituyendo en vez de $\operatorname{tag}\varphi$ y $\cos\varphi$ por sus valores

$$K = \frac{B}{\mu \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{q^2}{\mu^2} + \left(\frac{r}{\mu} - a\right)^2}}$$

La solución general será pues

$$\alpha = \frac{B}{\mu \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{q^2}{\mu^2} + \left(\frac{r}{\mu} - a\right)^2}} \operatorname{sen}(at - \varphi) + e^{-\frac{q}{2\mu} \cdot t} \left[ \mathcal{C}_1 \cdot e^{\sqrt{\frac{q^2}{4\mu^2} - \frac{r}{\mu}} \cdot t} + \mathcal{C}_2 \cdot e^{-t\sqrt{\frac{q^2}{4\mu^2} - \frac{r}{\mu}}} \right]$$

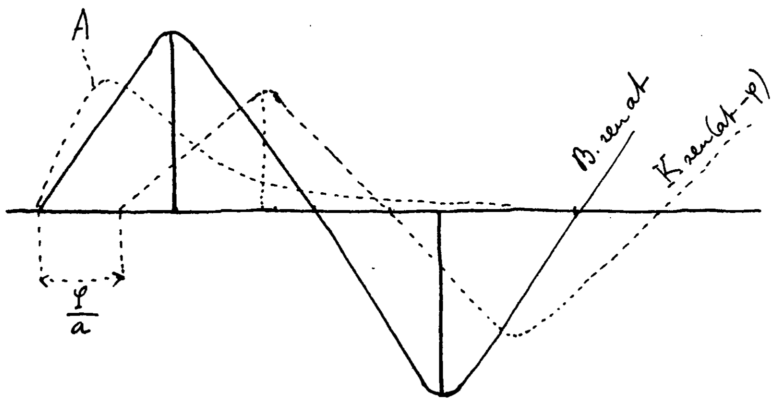
El movimiento que toma pues el sistema, es segun indica esta formula, la resultante de otros dos indicados respectivamente por el primero y segundo termino. Esto ultimo, que es la solución de la ecuación diferencial (1) sin segundo miembro $\underline{B . \operatorname{sen} at}$ corresponde al movimiento del sistema movil, si la causa agente que se trata de registrar, en vez de ser función del tiempo, dejase de actuar despues de haberse aplicado instantaneamente. Asi pues, el movimiento adquirido por el sistema no obrando sobre él más que la fuerza electromotriz ó corriente agente $\underline{B . \operatorname{sen} at}$ está representado por el primer termino del segundo miembro en la ultima ecuación; es un movimiento sinusoidal de la misma pulsación $\underline{a}$ que la fuerza electromotriz ó corriente que se trata de registrar pero retrasado en fase un angulo

$$\varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tag} \frac{a . \frac{q}{\mu}}{\frac{r}{\mu} - a^2}$$

igual á $\frac{\pi}{2}$ cuando $\frac{r}{\mu} = a^2$ ; mayor cuando $\frac{r}{\mu} < a^2$ ; menor cuando $\frac{r}{\mu} > a^2$. Este retraso equivale en tiempo á $\frac{\varphi}{a}$ como se indica en la figura.

Designando por

$$\delta^2 = \frac{q^2}{4\mu^2} - \frac{r}{\mu}.$$




$$\mathcal{E} = \frac{q}{2\mu}$$

se tendrá

$$\delta < \mathcal{E}$$

El segundo término se podrá poner bajo la forma

$$\frac{1}{e^{\mathcal{E}\cdot t}} \cdot \left[ \mathcal{E}_1 \cdot e^{\delta t} + \mathcal{E}_2 \cdot e^{-\delta \cdot t} \right]$$

ó bien

$$\mathcal{E}_1 \cdot \frac{1}{e^{(\mathcal{E}-\delta)t}} + \mathcal{E}_2 \cdot \frac{1}{e^{(\mathcal{E}+\delta)t}}$$

que es una función continua de $t$ ; siendo positiva para todos los valores de esta variable y nula para $t = 0$ por la naturaleza física del problema. Por ser $\mathcal{E} > \delta$ se anula tambien para $t = \infty$. En la figura está representada por la curva A.

Su valor maximo lo adquiere para

$$+\frac{C_1(\beta-\delta)}{e^{(\beta-\delta)t}}+\frac{C_2.(\beta+\delta)}{e^{(\beta+\delta)t}}=0$$

y como $C_1=-C_2$

$$\frac{\beta-\delta}{e^{(\beta-\delta)t}}=\frac{\beta+\delta}{e^{(\beta+\delta)t}}$$

de donde

$$t=\frac{1}{2\delta}\cdot\log_e\frac{\beta+\delta}{\beta-\delta}$$

Como indica claramente la figura, la curva A tiene muy poca importancia sobre el movimiento resultante despues de un cierto tiempo de iniciarse este; lo cual quiere decir que se puede tomar como representante del mismo á la curva $K\ \text{sen}(at-\varphi)$. Mas para que esta sea una indicación exacta de la función $B.\text{sen}\,at$ es necesario coincida en fase con ella; pues entonces conociendo la relación entre los valores maximos de ambas curvas quedaba resuelto el problema de conocer la curva representativa de la causa agente.

Para que

$$\varphi=\text{arc tag}\frac{a.\,q}{r-a^2\mu}$$

sea pequeño conviene que $q$ no sea demasiado grande; muy pequeño no puede hacerse pues entonces la curva A no se anularia tan rapidamente. Es preciso que $r$ sea grande, lo que equivale á decir en nuestro caso, que los imanes que forman el campo magnético antagonista del flujo producido por la corriente alternativa, sean bien potentes. Finalmente, el momento de inercia $\mu$ del sistema movil debe ser muy pequeño.

2º caso. — Raices reales é iguales. — $\frac{q^2}{4\mu^2} - \frac{r}{\mu} = 0$. — La solución general anterior no conviene en este caso, por no tener mas que una constante general á causa de ser $m_1 = m_2$. Pondremos

$$\alpha = K \operatorname{sen}(at - \varphi) + e^{mt}(C_1 t + C_2)$$

de donde

$$\frac{d\alpha}{dt} = K \cdot a \cdot \cos(at-\varphi) + C_1 e^{mt} + C_1 \cdot m \cdot t \cdot e^{mt} + C_2 \cdot m \cdot e^{mt}$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -K a^2 \operatorname{sen}(at-\varphi) + C_1 m \cdot e^{mt} + C_1 m^2 \cdot t \cdot e^{mt} + C_1 m \cdot e^{mt} + C_2 \cdot m^2 \cdot e^{mt}$$

y sustituyendo en (1)

$$\left[-K a^2 \operatorname{sen}(at-\varphi) + \frac{q}{\mu} \cdot K \cdot a \cos(at-\varphi) + \frac{r}{\mu} \cdot K \operatorname{sen}(at-\varphi) - B \cdot \operatorname{sen} at\right] +$$

$$+ C_1 e^{mt}\left[t\left(m^2 + \frac{q}{\mu} \cdot m + \frac{r}{\mu}\right) + 2m + \frac{q}{\mu}\right] + C_2 \cdot e^{mt}\left[m^2 + \frac{q}{\mu} \cdot m + \frac{r}{\mu}\right] = 0$$

ecuación que se satisface haciendo

$$\operatorname{tag} \varphi = \frac{\frac{q}{\mu} \cdot a}{\frac{r}{\mu} - a^2} = \frac{a \cdot q}{r - a^2 \cdot \mu}$$

$$m = -\frac{q}{2\mu}$$

por lo cual

$$\alpha = \frac{\beta}{\mu \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{q^2}{\mu^2} + \left(\frac{r}{\mu} - a\right)^2}} \cdot \operatorname{sen}(at - \varphi) + e^{-\frac{q}{2\mu} \cdot t}\left(\mathcal{C}_1 t + \mathcal{C}_2\right)$$

El primer término es el mismo que del caso anterior y se presta por tanto á las mismas reflexiones. El segundo debe ser cero para $t = 0$, lo que nos conduce á $\mathcal{C}_2 = 0$: quedando reducido á

$$\frac{\mathcal{C}_1 t.}{e^{\frac{q}{2\mu} \cdot t}}$$

función que se anula para $t = \infty$ pues la relación de las derivadas del numerador y denominador es

$$\frac{\mathcal{C}_1}{\frac{q}{2\mu} \cdot e^{\frac{q}{2\mu} \cdot t}}$$

igual á cero para $t = \infty$. El valor maximo corresponde á

$$\mathcal{C}_1 \cdot e^{\frac{q}{2\mu} \cdot t} - \mathcal{C}_1 \cdot t \cdot \frac{q}{2\mu} \cdot e^{\frac{q}{2\mu} \cdot t} = 0$$

ó sea para. $$t = \frac{2\mu}{q}$$

El movimiento del sistema, si este fuese libre, es como en el caso anterior aperiodico. Las condiciones de marcha y las consecuencias que se deducen son las mismas que ya expusimos.

3^{er} caso. Raices imaginarias. — $\frac{q^2}{4\mu^2} - \frac{r}{\mu} < 0$. — La solución general de la ecuación (1) es en este caso

$$\alpha = K \operatorname{sen}(at-\varphi) + \mathcal{C}_1 . e^{mt} . \cos(\beta . t + \mathcal{C}_2)$$

derivando

$$\frac{d\alpha}{dt} = K.a.\cos(at-\varphi) + \mathcal{C}_1 . m . e^{mt} . \cos(\beta t + \mathcal{C}_2) - \mathcal{C}_1 . e^{mt} . \beta . \operatorname{sen}(\beta t + \mathcal{C}_2)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -K a^2 . \operatorname{sen}(at-\varphi) + \mathcal{C}_1 . m^2 . e^{mt} . \cos(\beta t + \mathcal{C}_2) - \mathcal{C}_1 . m . \beta . e^{mt} . \operatorname{sen}(\beta t + \mathcal{C}_2) -$$
$$- \mathcal{C}_1 . m . \beta . e^{mt} . \operatorname{sen}(\beta t + \mathcal{C}_2) - \mathcal{C}_1 . \beta^2 . e^{mt} . \cos(\beta t + \mathcal{C}_2)$$

y sustituyendo

$$\left[-K . a^2 . \operatorname{sen}(at-\varphi) + \frac{q}{\mu} . K . a . \cos(at-\varphi) + \frac{r}{\mu} . K \operatorname{sen}(at-\varphi) - \frac{B}{\mu} . \operatorname{sen} at\right] +$$
$$+ \cos(\beta t + \mathcal{C}_2)\left[\mathcal{C}_1 . m^2 e^{mt} - \mathcal{C}_1 . \beta^2 . e^{mt} + \frac{q}{\mu} . \mathcal{C}_1 . m . e^{mt} + \frac{r}{\mu} . \mathcal{C}_1 . e^{mt}\right] -$$

$$- \operatorname{sen}(\beta t + C_2)\left[C_1 . m . \beta . e^{mt} + C_1 . m\, \beta . e^{mt} + \frac{q}{\mu} . C_1 . e^{mt} . \beta\right] = 0$$

ecuación de condición que se satisface para

$$\varphi = \operatorname{arc\,tag} \frac{a . \frac{q}{\mu}}{\frac{r}{\mu} - a^2} = \operatorname{arc\,tag} \frac{a\,q}{r - a^2 . \mu}$$

$$\left.\begin{aligned} m^2 - \beta^2 + \frac{q}{\mu} . m + \frac{r}{\mu} &= 0 . \\ 2m + \frac{q}{\mu} &= 0 . \end{aligned}\right\} (\alpha)$$

de donde

$$m = - \frac{q}{2\mu} .$$

y sustituyendo en la primera de las $(\alpha)$

$$\frac{r}{\mu} > \frac{q^2}{4\mu^2} \quad " \quad \beta^2 = \frac{r}{\mu} - \frac{q^2}{4\mu^2} . \quad " \quad \beta = \sqrt{\frac{r}{\mu} - \frac{q^2}{4\mu^2}}$$

por todo lo cual

$$\alpha = \frac{B}{\mu . \sqrt{a^2 . \frac{q^2}{\mu^2} + \left(\frac{r}{\mu} - a\right)^2}} . \operatorname{sen}(at - \varphi) + C_1 . e^{- \frac{q}{2\mu} . t} . \cos\left(\sqrt{\frac{r}{\mu} - \frac{q^2}{4\mu^2}} . t + C_2\right)$$

Haciendo

$$\rho = \sqrt{\frac{r}{\mu} - \frac{q^2}{4\mu^2}}$$

el segundo termino puede ponerse bajo la forma

$$e^{- \frac{q}{2\mu} . t}\left[M . \cos t . \rho - N . \operatorname{sen} t . \rho\right]$$

siendo

$$M = C_1 . \cos C_2$$

$$N = C_1 . \operatorname{sen} C_2$$

Como este término tiene que anularse para $t=0$, será

$$\mathcal{M}=0$$

quedando reducido á

$$\Phi = -\mathcal{N}.\, e^{-\frac{q}{2\mu}.t} .\, \text{sen}\, t\rho = -\frac{\mathcal{N}}{e^{\frac{q}{2\mu}.t}} .\, \text{sen}\, t\rho$$

Esta desviación angular correspondiente al sistema libre es unas veces positiva y otras negativas á medida que $t$ va aumentando y en valor absoluto decreciente á causa de entrar $e^{t.\beta = \frac{q}{2\mu}.t}$ en el denominador. La velocidad angular será

$$\frac{d\Phi}{dt} = \mathcal{N}.\, e^{-\frac{q}{2\mu}.t} \left[\frac{q}{2\mu}.\, \text{sen}\, t\rho - \rho.\cos t\rho\right] = \mathcal{N}.\, e^{-\beta t}.\left[\beta.\, \text{sen}\, t\rho - \rho.\cos t\rho\right]$$

y se anula para

$$\beta.\, \text{sen}\, t\rho = \rho.\cos t\rho \quad \text{ó sea} \quad \text{tag}\, t\rho = \frac{\rho}{\beta}$$

En el instante

$$\text{tag}\, t_1\rho = \frac{\rho}{\beta}.$$

ó bien

$$t_1 = \frac{1}{\rho}.\, \text{arc tag}\,\frac{\rho}{\beta}.$$

terminará la primera desviación; que valdrá

$$\Phi_1 = -\mathcal{N}.\, \frac{\rho}{\sqrt{\rho^2+\beta^2}} .\, e^{-\frac{\beta}{\rho}.\,\text{arc tag}\,\frac{\rho}{\beta}}$$

La velocidad angular se anulará tambien para

$$\text{tag}\, t_2\rho = \text{tag}\,(t_1\rho+\pi)$$

$$\text{tag}\, t_n\rho = \text{tag}\left[t_1\rho + \pi(n-1)\right]$$

ó sea para $$t_n = t_1 + \frac{\pi}{\rho}(n-1)$$
lo que nos dice es periodico el movimiento libre del sistema, con oscilaciones isocronas valiendo el semiperiodo $\frac{\pi}{\rho}$ y el periodo

$$T = \frac{2\pi}{\rho} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{r}{\mu} - \frac{q^2}{4\mu^2}}}$$

La enesima semioscilación valdrá

$$\Phi_n = -N \cdot e^{-\beta \cdot t_n} \cdot \operatorname{sen}(t_n \rho) = -N \cdot e^{-\beta t_1 - \beta \cdot \frac{\pi}{\rho}(n-1)} \cdot \operatorname{sen}\left[t_1 \rho + \pi(n-1)\right] =$$

$$= -N \cdot e^{-\beta \cdot t_1} \cdot (-1)^{n-1} \cdot \operatorname{sen} t_1 \rho \cdot \times e^{-\beta \cdot \frac{\pi}{\rho}(n-1)}$$

ó sea
$$\Phi_n = (-1)^{n-1} \cdot \Phi_1 \cdot e^{-\beta \cdot \frac{\pi}{\rho} \cdot (n-1)}$$

Del mismo modo

$$\Phi_{n+1} = (-1)^n \cdot \Phi_1 \cdot e^{-\beta \cdot \frac{\pi}{\rho} \cdot n}$$

que nos demuestra forman una progresión geometrica decreciente en valor absoluto y cuya razon es
$$e^{-\beta \cdot \frac{\pi}{\rho}} = e^{-\beta \cdot \frac{T}{2}}$$

La solución general en este caso tomará pues la forma

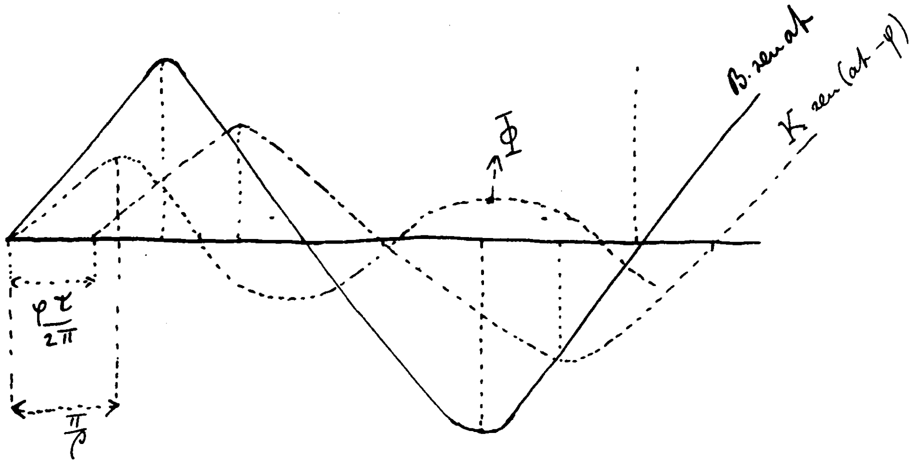
$$\alpha = \frac{B}{\mu \cdot \sqrt{a^2 \cdot \frac{q^2}{\mu^2} + \left(\frac{r}{\mu} - a\right)^2}} \cdot \operatorname{sen}(at - \varphi) - N \cdot e^{-\frac{q}{2\mu} \cdot t} \operatorname{sen} \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

El retraso $\varphi$ puede ponerse bajo la forma

$$\varphi = \operatorname{arc\,tag} \frac{2\beta \cdot 2\pi}{\beta^2 + 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2} - \frac{1}{\tau^2}\right)}$$

siendo $\tau$ el periodo de la causa agente

$$a = \frac{2\pi}{\tau}$$




En la figura se han representado como en el primer caso, la curva

$B.$ sen $at.$

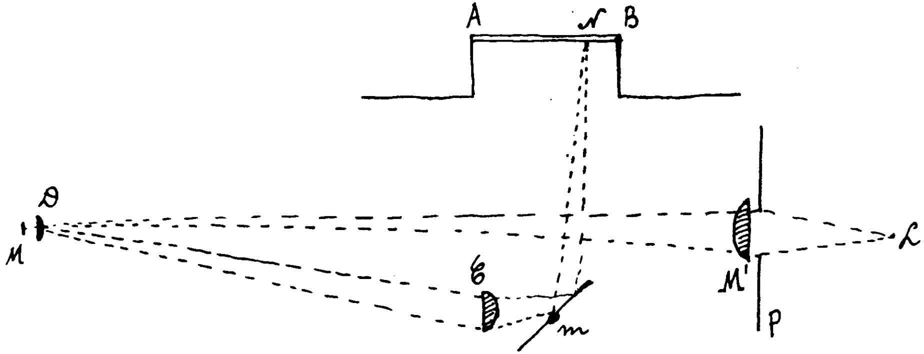
el movimiento

$K$ sen$(at-\varphi)$

debido á esta causa agente, y el movimiento $\Phi$ libre del sistema: bajo la hipotesis de de que $T < \tau$. Convendrá pues, que $\varphi$ sea lo mas pequeño posible: lo mismo que $T$. Lo que nos lleva á deducir que $\frac{r}{\mu}$ debe ser grande con relación $\frac{q}{2\mu} = \beta$; en otros terminos, <u>para un cierto valor del amortiguamiento, el par director debe ser grande y pequeño</u>

el momento de inercia del sistema movil.

Conocidas las condiciones generales á que tiene que satisfacer todo oscilografo estudiaremos la disposición óptica para registrar la desviación de la lamina de hierro. Esta se encuentra encerrada




en un tubo de vidrio conteniendo aceite de ricino empleado como amortiguador: lleva un pequeño espejo plano M de algunas decimas de milimetro como lado precedido de otra lente plano-convexa D. Una pantalla P con ranura estrecha vertical es iluminada con un arco voltaico L poderoso. Los rayos luminosos reflejados por M son concentrados por la lente cilindrica C de eje horizontal reduciendose á un punto la imagen de la ranura.

El espejo m inclinado proximamente 45° envia este punto luminoso á un vidrio deslustrado AB; es movible alrededor de su eje horizontal m por medio de una cama montada en el eje de un motor sincronico alimentado por una corriente de la misma frecuencia que la objeto de estudio, La cama esta dispuesta de tal modo que el movimiento del espejo se divida en dos partes: desplazamiento de A hacia B del punto luminoso, proporcional al tiempo; y regreso de B hacia A rapidamente, impidiendo el paso de la luz en este intervalo por medio de un obturador electrico ó mecánico para evitar las perturbaciones luminosas producidas por este retroceso.

Si por las bobinas no pasa corriente alguna el punto luminoso se moverá evidentemente segun una recta AB: si una corriente alternativa las recorre el espejo M se desviará en los dos sentidos segun las variaciones de aquella y el punto luminoso M trazará sobre el vidrio deslustrado una curva luminosa cuyas abcisas segun AB serán proporcionales al tiempo y cuyas ordenadas perpendiculares á estas dependeran de las variaciones angulares del espejo M sensiblemente proporcionales, segun se ha visto, á los valores instantaneos de la causa agente. Si la bobina esta formada por hilo grueso la curva registrada corresponderá á las intensidades de la corriente alternativa: si por el contrario es de un gran numero de espiras de hilo fino con una resistencia conveniente sin auto-inducción ni capacidad, la curva registrada corresponderá á la fuerza electromotriz de la corriente alternativa, pues el conjunto constituye un verdadero voltmetro. En el oscilografo doble hay de estas dos clases de bobinas para registrar al mismo tiempo las dos curvas; con un espejillo fijo para trazar el eje de los tiempos.

Rendimiento del grupo motor-ventilador. La potencia suministrada al motor es $15^{A} \times 105^{V} = 1575$ watios $= 1^{K.w},575$

lo que equivale en caballos de vapor á

$$1^{K.w},575 \times 1,36 = 2^{cv},142$$

Los elementos del ventilador son

$$\text{Diametro del ojo} = 0^{m}.30$$

$$\text{Depresión producida} = 35 \text{ milimetros de agua} = h$$

La velocidad del aire en metros, viene dada por la formula

$$v = \sqrt{2g.\frac{h}{\varpi}}$$

siendo

$$h = 35 \quad " \quad \varpi = 1^{Kg}.2 \quad " \quad g = 9.8$$

$$\begin{array}{rl} \log 19.6 = & 1,29225607 \\ \log 35 = & 1.54406804 \\ \hline & 2,83632411 \\ \log 1.2 = & 0.07918125 \\ \hline & 2,75714286 \end{array}$$

$$\log v = 1,3785714 3$$

de donde $v = 23^{m}.99$ ó bien $v = 24$ metros.

El valor del gasto de aire, teniendo en cuenta la contracción de la vena gaseosa, será

$$q = 0,65 \times \frac{\pi}{4} \times \overline{0^{m},3}^{2} \times 24^{m}$$

$$q = 1^{m^3},10214$$

El trabajo correspondiente en caballos vale

$$\frac{q \cdot h}{75} = 0,0133 \times h \cdot q$$

$$0,0133 \times 35 \times 1,10214 = 0^{cv}.513028$$

Resulta para el rendimiento buscado, la fracción

$$\frac{0.513028}{2.142} = 0,2395$$

ó sea aproximadamente un 24 por ciento.

I/ $N = 134$

$V = 100$

$I_e = 0.$

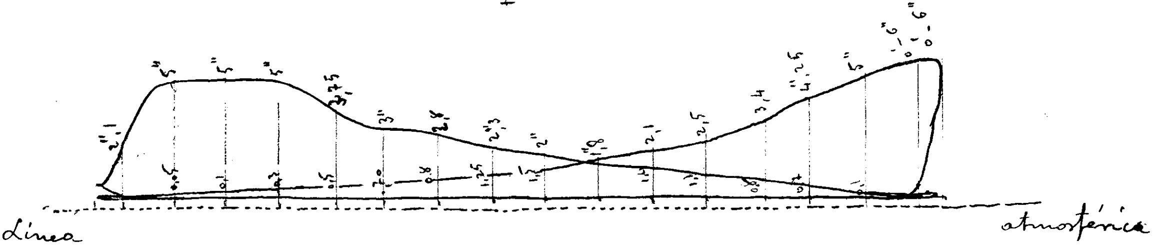
$i_d = 1^A{,}20.$

Resorte 1': 24 th

31 Ma

2,1 .. 5

I



II) $N = 136$

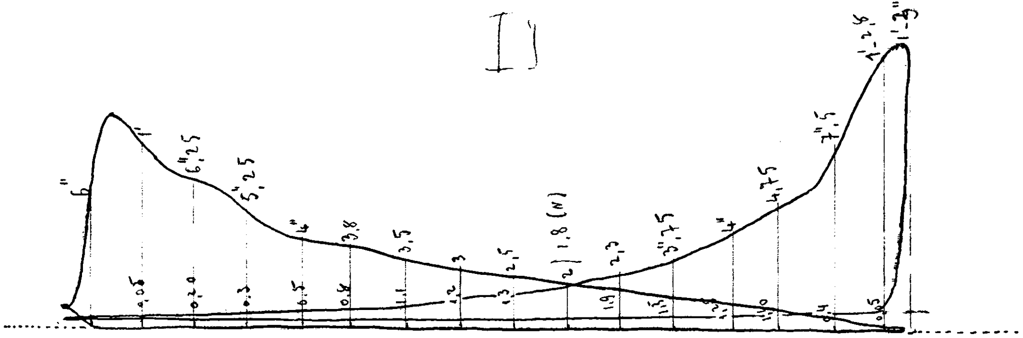
$r = 100$

$i_e = 5{,}70$

$i_d = 1{,}30$

resorte 1' : 24 lts

31 May

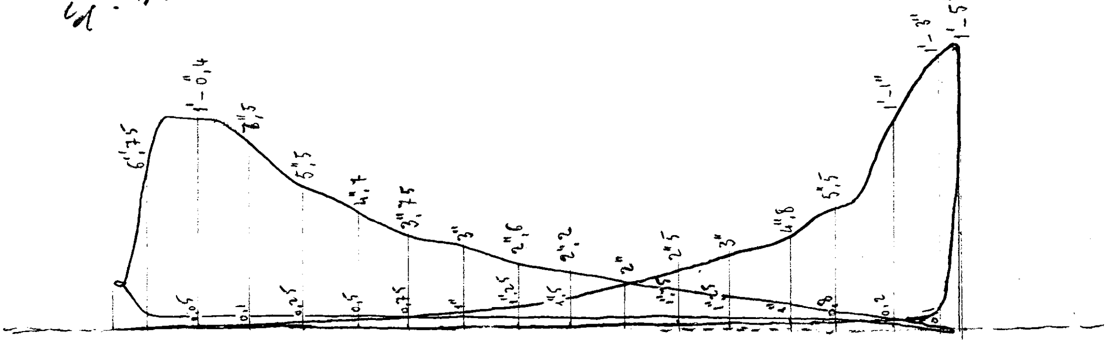


III) $N = 138$ retorte = 1' : 24 bts 31 M

$V = 100$

$I_e = 10$

$i_d = 1,40$

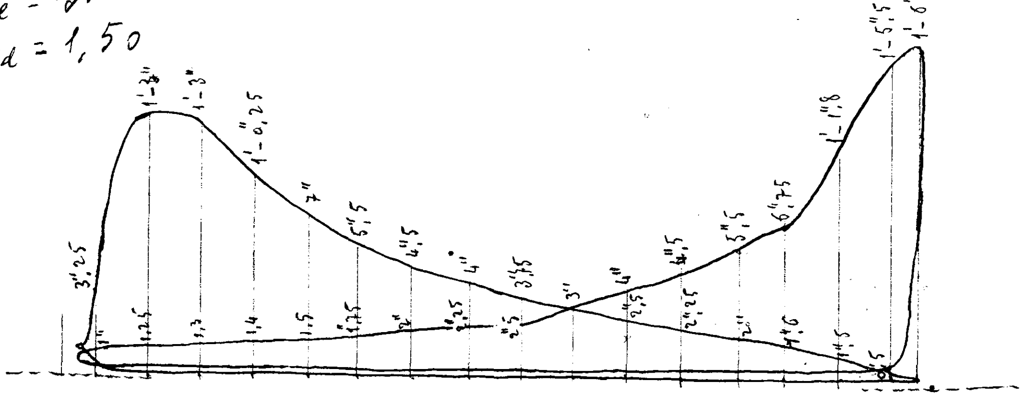


IV) $N = 138$ resorte: $1' = 24$ th. 31 Mayo

$r = 100$

$I_e = 19{,}50$

$i_d = 1{,}50$



31 Mayo 90

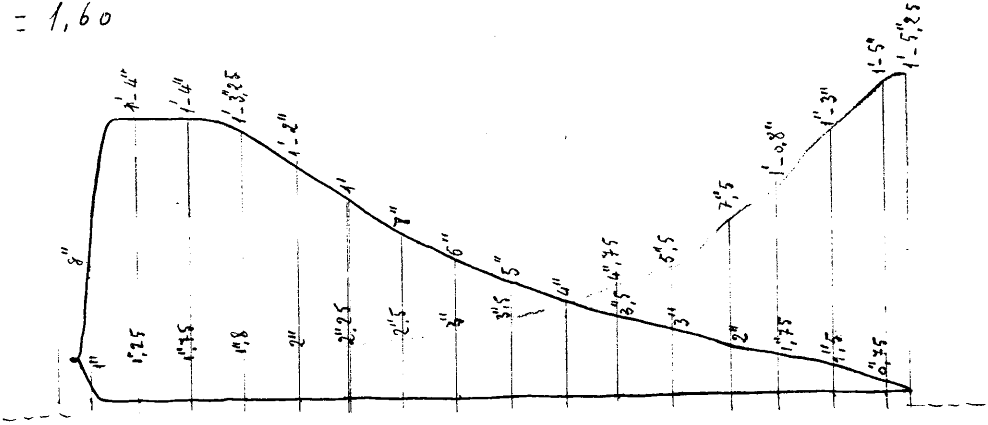
V) $N = 136$

$V = 100$

$I_e = 27,40$

$i_d = 1,60$

resorte: 1' = 24 tn



VI

$N = 132$
$r = 100$
$F_e = 31,20$
$i_d = 1,65$

Vedante = 1' = 24 ltr.

31 Mayo 905

$p_m$ { $N^{te}$ — 18 ltr = 0,75 ; S — 20,88 = 0,87 } 19,44 ltr.